

INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BRAUNSCHWEIG
DIREKTOR: o. PROF. DR.-ING. KARL KORDINA

30-0194/001

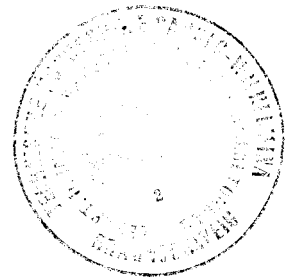
Über das Tragverhalten von flachen zylindrischen Einzel-Tonnen-
schalen unter Einbeziehung der Theorie großer Deformationen

B e r i c h t

erstattet von

Dipl.-Ing. G. Ivanyi

1967



Postsendungen:
33 Braunschweig, Beethovenstraße 52

Fernsprecher: 478 281
Ortskennzahl 0531
Telegrammadresse: MPA Braunschweig

Besuchszelten:
Montag bis Freitag 8-16 Uhr

DK 624.046 : 624.074.4 : 539.37

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Allgemeines	2
2. Theoretische Überlegungen zur Verfolgung des Tragverhaltens freistehender, flacher Tonnenschalen	2
2.1 Allgemeine Behandlung des Problems	2
2.11 Möglichkeiten des Verlustes der Tragfähigkeit einer freistehenden Tonnenschale	2
2.12 Allgemeines über die Stabilitätstheorie der Schalen	3
2.13 Allgemeines über die Schalenbruchtheorie	4
2.2 Die elastische Stabilitätstheorie der Tonnenschalen	5
2.21 Die Grundgleichungen der Schalentheorie unter Berücksichtigung der großen Deformationen in Hauptkrümmungs-Koordinatensystem (Theorie III. Ordnung)	5
2.22 Kurzer Überblick über die bisher mit Hilfe der Theorie III. Ordnung gelösten Schalenprobleme	9
2.221 Geschlossene Zylinderschale unter Axialdruck	9
2.222 Zylindrisches Schalenfeld unter Axialdruck	9
2.223 Die abmindernde Wirkung einer Anfangsdeformation auf die kritische Grenze	11
2.224 Zylindrisches Schalenfeld unter Querbelastrung	11
2.225 Gemeinsame Wirkung von axialem Druck und Querbelastrung	12
2.23 Die praktische Anwendung von 2.22	12
2.231 Die gebräuchliche Stabilitätsuntersuchung einer Tonnenschale	12
2.232 Kritische Betrachtungen zur gebräuchlichen Stabilitätsuntersuchung einer Tonnenschale	13
2.233 Analyse der Beanspruchung des Schalenfeldes einer Tonnenschale mit oder ohne Randträger	14
2.224 Der Brazier-Effekt	16
2.3 Übertragung der Ergebnisse der Elastizitätstheorie auf Stahlbeton-Tonnenschalen	21
2.31 Allgemeines	21
2.32 Iteratives Verfahren zur Bestimmung der Momenten-Tragfähigkeit eines Stahlbeton-Tonnenschalenquerschnittes unter Berücksichtigung des Verflachungseffektes	22
2.321 Annahmen	22
2.322 Die Ableitungen der Iterationsformeln	23
2.323 Beschreibung des Rechenvorganges	25
2.33 Schlußfolgerung	27

	Seite
3. Experimentelle Untersuchungen von Modellschalen	28
3.1 Allgemeines	28
3.2 Modellwerkstoff	29
3.21 Asbestzement	29
3.211 Allgemeines	29
3.212 Materialeigenschaften	29
3.22 Kunststoffmörtel	30
3.23 Plexiglas	30
3.3 Modellversuche	30
3.31 Beschreibung der Modellherstellung	30
3.311 Asbestzement-Modelle	30
3.312 Kunststoffmörtel-Modelle	31
3.313 Plexiglas	31
3.33 Versuchsdurchführung	32
3.334 Versuchsergebnisse	32
3.35 Zusammenfassung der Versuchsergebnisse	35
3.36 Nachweis der Traglast von Modellschalen gem.2.323	35
4. Zusammenfassung	36
Literaturverzeichnis	37

1. Allgemeines

Wie bekannt, stehen für die Berechnung von flächenartigen Stahlbeton-Tragwerken im Gebrauchszustand Rechenmethoden in ausreichendem Maße zur Verfügung. Diese Methoden erfassen das Tragverhalten solcher Tragwerke in der Regel auf Grund der Elastizitätstheorie unter der Annahme von unendlich kleinen Deformationen (Theorie I. Ordnung). Die zahlreichen durchgeführten experimentellen Versuche bestätigten, daß die untersuchten Tragwerke im Gebrauchszustand tatsächlich ein den Rechengrundlagen entsprechendes Tragverhalten zeigen.

Es gibt jedoch einige Tragverhaltensprobleme

- a) infolge mangelhafter Ausführung entstandene Formungenauigkeiten, die die Größenordnung der Schalendicke erreichen können;
- b) Zeitabhängigkeit, langsame Deformationen (Kriechen, Schwinden usw.);
- c) infolge Überbeanspruchung entstandene größere Deformationen,

die unter Zugrundelegung der Theorie I. Ordnung im Falle des Werkstoffes Stahlbeton nicht erfaßt werden können.

Alle diese Probleme besitzen ein gemeinsames Merkmal: zu ihrer Berücksichtigung müssen die auftretenden Deformationen bzw. deren Rückwirkung auf den ursprünglichen Gleichgewichtszustand in Berechnung gestellt werden. Solchen Lösungen kommt eine besonders große Bedeutung bei flachen Flächentragwerken zu, da diese Konstruktionen in der Regel stabilitätsgefährdet und demzufolge deformationsempfindlich sind. Die Ergebnisse derartiger Untersuchungen sind bei der Beurteilung der erforderlichen bzw. vorhandenen Sicherheit des Tragwerks von besonderer Wichtigkeit.

Ähnlich wie unter höheren Laststufen oder im Falle vorhandener Ausführungsungenauigkeiten treten unter Kriechen ebenfalls große Deformationen auf. Dementsprechend lag nahe, diesen einzigen Einfluß nicht von den anderen getrennt zu untersuchen, sondern das gemeinsame Merkmal - große Deformationen - den Untersuchungen weiterhin zugrunde zu legen.

Da die vorgetragenen Probleme nur unter Inanspruchnahme der Theorie großer Deformationen zu behandeln sind, schien es zweckmäßig, grundsätzliche Anhaltspunkte durch experimentelle Versuche zu gewinnen, um die fast unüberwindlichen theoretischen Schwierigkeiten zu beheben. Den Untersuchungen

wurde die freistehende flache, kreiszylindrische Tonnenschale zugrunde gelegt. Um eine Ähnlichkeit zum Werkstoff Stahlbeton zu erzielen, jedoch gleichzeitig die Versuchskosten kleinzuhalten, wurde als Modellmaterial der mit Bewehrung versehene Asbestzement gewählt. Hierbei rechnete man damit, daß infolge der relativ geringen Zugfestigkeit des Modellmaterials eine dem Stahlbeton ähnliche Rißbildung zu beobachten sei und die relativ hohe Biegezugfestigkeit trotzdem erlaubt, daß das Schalensegment der Modelle, ohne besondere Maßnahmen zu treffen, sich wie bewehrter Stahlbeton verhält. Diese Überlegungen wurden im großen und ganzen von der Versuchsserie bestätigt und dienten als Vorversuche für die zu einem späteren Zeitpunkt geprüften Großmodelle.

Nachfolgend werden zuerst einige Ergebnisse einer allgemeinen Studie der Großdeformationstheorie dargelegt. Auf Grund dieser Ergebnisse wird dann ein iteratives Lösungsverfahren entwickelt, bei dem die Besonderheiten des Werkstoffes Stahlbeton berücksichtigt sind. Im zweiten Teil des vorliegenden Berichtes werden dann die durchgeführten experimentellen Versuche und deren Ergebnisse wiedergegeben.

2. Theoretische Überlegungen zur Verfolgung des Tragverhaltens freistehender, flacher Tonnenschalen

2.1 Allgemeine Behandlung des Problems

2.11 Möglichkeiten des Verlustes der Tragfähigkeit einer freistehenden Tonnenschale

Es sei vorweg darauf hingewiesen, daß für die nachfolgenden Abhandlungen unter "Erschöpfung der Tragfähigkeit" sowohl ein Stabilitätsproblem als auch ein Spannungsproblem zu verstehen ist, da es für die Baupraxis uninteressant ist, ob die Überbeanspruchung als Begleiterscheinung eines Beulvorganges auftritt oder die natürlichen Deformationen den Bruch herbeiführen. Im Falle einer Tonnenschale z.B. ist es gleichgültig, ob sie infolge der in überkritische Größenordnungen gewachsenen Spannungen beult oder sich infolge ungenügender Bewehrung

über den Auflagern ein Schubbruch einstellt. Alle Teile einer Konstruktion sollen bekanntlich möglichst gleiche Sicherheit besitzen. Um dieses Ziel zu erreichen, ist es u.a. erforderlich, das Verhalten des Gesamttragwerkes auch im Erschöpfungszustand kennenzulernen. Bei flachen Tonnenschalen ist unter anderem zu berücksichtigen, daß dieses Verhalten vom Gebrauchszustand erheblich abweichen kann.

Es werden im Bereich der theoretischen Behandlung zwei Bruchursachen unterschieden, nämlich Stabilitätsverlust und Erschöpfung infolge Überschreitens der vom Material abhängigen Spannungs- bzw. Dehnungsgrenzwerte.

2.12 Allgemeines über die Stabilitätstheorie der Schalen

Stabilitätsprobleme, wie sie von den eindimensionalen Problemen bekannt sind, verlangen stets eine verfeinerte Methode - im Vergleich zur Bemessung - um die Stabilitätsgrenze zu ermitteln. Bei der Knickuntersuchung eines einfachen Stabes [38], [49] z.B. müssen die Verformungen der Stabachse unbedingt berücksichtigt werden, obwohl bei der einfachen Bemessung diese Verformungen außer acht gelassen werden können. Zur Vereinfachung können die Verformungen bei der Knickuntersuchung als unendlich klein angenommen werden, wenn das Verformungsverhalten des Stabes nach Erreichen der Knicklast nicht wichtig ist, - was immer der Fall sein wird.

Für die Bestimmung der Beullast einer Platte sind ähnliche Annahmen ausreichend wie bei eindimensionalen Problemen [30]. Bei Platten und Plattensystemen tritt aber öfter der Fall ein, daß der sogenannte überkritische Bereich - das Tragvermögen nach dem Ausbeulen - erfaßt werden soll (Bild 1 b), da das Beulen hierbei nicht unbedingt zugleich schon das Versagen bedeutet. Die Bestimmung des Verhaltens einer Platte im überkritischen Bereich kann mit der Annahme endlich großer Verformungen erfaßt werden [51].

Die vorerwähnten beiden Stabilitätsfälle können mit dem Sammelbegriff Verzweigungsproblem bezeichnet werden. Ausgehend von energetischen Betrachtungen, läßt sich ein Verzweigungsproblem als Stabilitätsproblem mit einer einzigen Minimumstelle in der Funktion der potentiellen Energie des Systems definieren. Ein Schalen-Stabilitätsproblem hat dagegen

mindestens zwei Minimumstellen, wobei das kleinste Minimum festzustellen ist. Probleme mit mindestens zwei Minimumstellen in der Funktion der potentiellen Energie werden in der Stabilitätstheorie als Durchschlagsprobleme bezeichnet [19], [38], [48], [49]. Dabei ist bei Schalen zu berücksichtigen, daß das kleinste Minimum mit endlich großen Verformungen verbunden ist (Bild 1 c), was zu einer nichtlinearen Theorie der Stabilitätslehre der Schalen führt.

Wie aus Bild 1 c zu ersehen ist, kann mit Hilfe der linearen Theorie die größere Minimumstelle, die sogenannte obere kritische Grenze und mit Hilfe der nichtlinearen Theorie die untere kritische Grenze bestimmt werden. Im Bereich zwischen unterer und oberer kritischen Last sind drei Gleichgewichtslagen möglich, wovon aber nur die am tiefsten ausgebeulte Lage stabil ist. Eine schlagartige Durchbiegung des Querschnittes ist also von der unteren Grenze an zu erwarten.

2.13 Allgemeines über die Schalenbruchtheorie

Infolge der plastischen Eigenschaften der im Bauwesen angewendeten Materialien ist die Annahme richtig, die Konstruktionen in der Nähe des Bruches mit Hilfe der Plastizitätstheorie zu untersuchen. Dies geschieht unter Ausnutzung der Minimumsätze der Plastizitätstheorie [39], nach denen die Größe der Last, die den Bruch verursacht, zwischen zwei Grenzwerten liegen muß: größer als die statisch mindestens zu erreichende und kleiner als die kinematisch zulässige Last. In den praktischen Berechnungen kommt der Einfachheit halber häufiger der obere Minimumsatz zur Anwendung, dessen vereinfachte Form für Platten die sogenannte Bruchlinientheorie darstellt [46].

Um die Plastizitätstheorie auch für flache Schalen anwenden zu können oder die Bruchlinientheorie auf sie auszuweiten, wären unbedingt die bis kurz vor Bruch auftretenden Deformationen zu berücksichtigen [21], [34]. Da aber Ergebnisse der Plastizitätstheorie, angewandt auf Tonnenschalen, erst in jüngster Zeit entstanden sind und ohne Berücksichtigung der großen Deformationen abgeleitet wurden [8], [13], [16], [21], [25], [36], [42], [44], [45], kommen sie für das hier behandelte Problem nicht in Frage.

Es gibt aber die Möglichkeit, unabhängig von der Plastizitätstheorie

die plastischen Eigenschaften des Materials, z.B. des Betons, bei der Bestimmung des Erschöpfungszustandes zu berücksichtigen: Wenn die Möglichkeit besteht, die Deformationen (evtl. nur näherungsweise) zu bestimmen, kann die tatsächliche Arbeitslinie des Betons sowohl für die Ermittlung des Grenzbiegemomentes in Haupttragrichtung als auch für die zugeordneten Querbiegemomente herangezogen werden. Dieses Verfahren wird in Abschnitt 2.3 im einzelnen behandelt.

2.2 Die elastische Stabilitätstheorie der Tonnenschalen

2.21 Die Grundgleichungen der Schalentheorie unter Berücksichtigung der großen Deformationen im Hauptkrümmungs-Koordinatensystem (Theorie III. Ordnung)

Die Grundgleichungen der Theorie III. Ordnung wurden von Kármán abgeleitet [23]. Nachfolgend werden nur die Endergebnisse genannt. Die nötigen Bezeichnungen sind in Bild 2 dargestellt.

Auf Grund der vertikalen Gleichgewichtsbedingung bekommt man die erste Gleichung:

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = L(w, \phi) + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h}, \quad (1)$$

während die Verträglichkeitsbedingungen die zweite Gleichung ergeben:

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

wobei die angewandten mathematischen Abkürzungen lauten:

$$\nabla^2 \nabla^2 () = \frac{\partial^4 ()}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 ()}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 ()}{\partial y^4}; \quad (3)$$

$$L(A, B) = \frac{\partial^2(A)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2(B)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(A)}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2(B)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2(A)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2(B)}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5)$$

ist die Plattensteifigkeit und Φ die Spannungsfunktion:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \tilde{\sigma}_y; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \tilde{\sigma}_x; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau \quad (6)$$

Besteht eine Anfangsdeformation in Richtung der z -Achse, so kann man die Gln. (1), (2) folgenderweise umformen:

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = L(w + w_0, \Phi) + k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h} \quad (7)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(w + 2w_0, w) - k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

Da eine exakte Lösung weder von Gln. (1), (2) noch von Gln. (7), (8) bekannt ist, verbleibt die Möglichkeit, Ansätze mit wenigen Gliedern für die Verschiebungen, evtl. nur für die Verschiebung in Richtung der z -Achse (w), oder für die Spannungsfunktion anzuwenden. Dabei können verschiedene Lösungswege beschritten werden: die unbestimmten Koeffizienten des ausgewählten Ansatzes können sowohl mit der Energiemethode oder Variationsrechnung als auch mit der Differenzenmethode ermittelt werden [6], [21/a]. Die sogenannten geschlossenen Methoden geben das Ergebnis mit Hilfe des ausgewählten Ansatzes gleichzeitig für jeden Punkt der Schale an; während mit der Differenzmethode die Ergebnisse Punkt für Punkt ermittelt werden. Dementsprechend ist die Differenzmethode vor allem für den Einsatz eines elektronischen Rechners geeignet.

Zur Anwendung der Energiemethode benötigt man die Ausdrücke der Arbeitsanteile der inneren Kräfte. Die vollständige potenzielle Energie Π setzt sich aus der Deformationsarbeit (U) und äußeren Arbeit (V) zusammen:

$$\Pi = U + V \quad (9)$$

Die Deformationsarbeit (Arbeit der inneren Kräfte) besteht aus zwei Teilen, der Arbeit der Mittelflächenkräfte:

$$U_m = \frac{h}{2E} \iint_{(F)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1+\nu) \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (10)$$

und jener der Biegekräfte:

$$U_b = \frac{D}{2} \iint_{(F)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (11)$$

Die äußere Arbeit V ist je nach der Belastungsart zu bestimmen.

Der Lösungsweg an Hand der Energiemethode lautet wie folgt:

1. Auswahl des Ansatzes $w = \sum c_i f_i(x, y)$;
2. Bestimmung der Spannungsfunktion Φ nach Gln. (2) bzw. Gln. (6);
3. Ermittlung des Ausdruckes der potentiellen Energie nach Gln. (8)-(11);
4. Die potentielle Energie zum Minimum zu bringen, das bedeutet nach der Energiemethode

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad (12)$$

wobei c_i die unbekannten Konstanten darstellen.

5. Als Ergebnis erhält man i Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Konstanten.

Verfährt man nach der Variationsmethode von Bubnow-Galerkin, so muß der nachstehende Lösungsweg verfolgt werden:

1. Auswahl des Ansatzes $w = \sum c_i f_i(x, y)$;
2. Bestimmung der Spannungsfunktion Φ nach Gln. (2) bzw. (6);
3. Bildung der Größe von

$$X = D \nabla^2 \nabla^2 w - h L(w, \Phi) - h k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - q \quad (13)$$

4. Ermittlung der sogenannten Bubnow-Galerkin'schen Gleichungen:

$$\iint_{(F)} X f_i(x, y) dx dy = 0 \quad (14)$$

wobei $f_1(x, y)$ eine Komponente des Ansatzes ohne Konstante ist.

5. Das Endergebnis wird dann wie bei der Energiemethode durch i Gleichungen dargestellt, die zur Bestimmung der Unbekannten dienen.

Trotz der Ähnlichkeiten zwischen der Energiemethode und dem Verfahren nach Bubnow-Galerkin besteht doch ein großer Unterschied zwischen beiden Wegen: Während die Bubnow-Galerkinsche Methode voraussetzt, daß der ausgewählte Ansatz alle Randbedingungen erfüllt - was aber meistens nicht möglich ist - hat man bei der Energiemethode die Möglichkeit, bei den inneren und äußeren Kräften bzw. Verschiebungen nur diejenigenauszuwählen, welche voraussichtlich auch in Wirklichkeit auftreten [51].

Um die Lösungen allgemein zu halten, pflegt man in praktischen Berechnungen die folgenden dimensionslosen Größen einzuführen:

$k = \frac{b^2}{R \cdot h}$	Krümmungsparameter. Wobei	$\left. \begin{array}{l} (vgl. hierzu \\ Wolmir 51) \end{array} \right\}$
	$0 < k < 24$ geringe Krümmung	
	$24 < k < 180$ mittlere Krümmung	
	$180 < k$ große Krümmung	
$\lambda = \frac{a}{b}$	Seitenverhältnis	$\left. \begin{array}{l} (15) \end{array} \right\}$
$p_x^* = \frac{P_x a^2}{E h^2}$	Belastungsparameter, deren kritische Werte mit $p_{kr,o}^*$ und $p_{kr,u}^*$ bezeichnet werden.	
$p_y^* = \frac{P_y b^2}{E h^2}$		
$q^* = \frac{q a^2 b^2}{E h^4}$	Belastungsparameter für die Querbela-	
$\xi = \frac{f_i}{h} ; \xi_o = \frac{f_o}{h}$	Durchbiegungsparameter	

Es ist noch zu erwähnen, daß die genaue Erfüllung der Randbedingungen mit wachsendem Krümmungsparameter ihre Bedeutung verliert bzw. der aus den schlecht erfüllten Randbedingungen resultierende Fehler vernachlässigbar klein wird.

2.22 Kurzer Überblick über die bisher mit Hilfe der Theorie III. Ordnung gelösten Schalenprobleme

2.221 Geschlossene Zylinderschale unter Axialdruck

Lange Zeit waren nur die Ergebnisse der linearen Theorie bekannt, die sowohl für eine geschlossene Zylinderschale als auch für ein zylindrisches Schalenfeld das gleiche Ergebnis [5], [14], [17], [32], [37], [49], [51]:

$$p_{kr,0} = 0,605 E \frac{h}{R} = \alpha E \frac{h}{R} \quad (16)$$

gebracht hatten, obwohl Karman und Tsien bereits im Jahre 1941 die Lösungen nach der Theorie III. Ordnung entwickelt hatten [23], nach welchen (vergl. Bild 1 c) die untere kritische Grenze für diesen Belastungsfall etwa bei

$$\alpha \approx 0,2; \quad p_{kr,u} = 0,2 E \frac{h}{R} \quad (17)$$

zu suchen ist. Langjährige experimentelle Untersuchungen zeigten, daß die kritische Last gemäß der linearen Theorie nicht erreichbar ist. Gleichzeitig wurden damit die Annahmen der Theorie III. Ordnung bestätigt, abgesehen davon, daß die auf verschiedene Art durchgeführten experimentellen Untersuchungen eine große Streuung aufwiesen und überwiegend kleinere Werte α als 0,2 erbrachten. [11], [23], [32], [33], [47]:

$$\alpha = 0,06 \div 0,40 \quad (18)$$

2.222 Zylindrisches Schalenfeld unter Axialdruck

Das in Bild 3 dargestellte Problem wurde von Wolmir gelöst [51].

Als Randbedingungen wurden sowohl feste Einspannung als auch vierseitige gelenkige Lagerung angenommen, mit der gleichzeitigen Annahme, daß - unabhängig von der Lagerungsart - die Randfasern in Längsrichtung frei dehnbar bleiben. Wolmir fand, daß für Schalen, die einen Krümmungsparameter $k < 24$ haben, im Falle gelenkiger Lagerung unter Anwendung eines eingliedrigen Ansatzes von

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \quad (19)$$

eine Belastungs-Durchbiegung Funktion

$$p^* = p_{kr,0}^* + \frac{\pi^2}{8} \xi^2 - \frac{10}{3\pi^2} k \xi \quad (20)$$

abzuleisten ist. Hierbei wurde vereinfacht $\lambda = 1$ eingeführt. Wolmir folgte mit dem Ansatz (19) der Bubnow-Galerkin'schen Methode. Die auf verschiedene k-Werte bezogenen charakteristischen Kurven haben einen ähnlichen Verlauf zu der in Bild 1 c dargestellten Kurve. Die waagerechten Tangenten dieser Kurven ergeben die untere kritische Grenze in Form:

$$P_{kr,u}^* = P_{kr,0}^* - \frac{200}{9\pi^2} k^2 \quad (21)$$

Für Schalen mit größerer Krümmung reichen die Gleichungen (20) und (21) nicht aus. Um das Problem besser anzunähern, benötigt man einen mehrgliedrigen Ansatz, welcher auch ein antisymmetrisches Glied enthält:

$$w = f_1 \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \quad (22)$$

Mit der Anwendung der Energiemethode erhielt Wolmir mit $\lambda = 1$ und $\underline{m} = \underline{n}$ (gleiche Halbwellenzahl in Quer- und Längsrichtung):

$$p^* = 3,62n^2 + \frac{k^2}{4\pi^2 n^2} + \frac{\pi^2 n^2 (1 + 3,36\psi^2)}{8} \xi^2 - 0,625k\psi \xi \quad (23a)$$

$$1,47n^2 \xi^2 \psi^3 - \frac{15}{16} k \xi \psi^2 - (3,22n^2 \xi^2 - \frac{3}{632} \frac{k^2}{n^2} + 4,52n^2) \psi + \frac{5}{16} k \xi = 0 \quad (23b)$$

worin

$$\psi = \frac{f_2}{f_1} \quad (23c)$$

Es gelten die früheren Abkürzungen. Wird das Gleichungssystem von (23a-b) für mittlere Krümmung ausgewertet, zeigt sich, daß sich die oberen und unteren kritischen Spannungswerte nicht bei gleicher Halbwellenzahl ergeben (s. Bild 3). Die Tangente an die im Bild 3 dargestellte Spitzwellenkurve für die untere kritische Grenze ergibt einen Wert von $P_{kr,u}^* = 0,37k$. Die weitere Analyse des Ansatzes von (22) für $m \neq n$ bringt einen noch kleineren Wert

$p_{kr,u}^* = 0,26k$. Wolmir hatte einen kleineren Beiwert als 0,26 bei seinen experimentellen Untersuchungen nur jeweils beim zweiten Belastungsversuch und nur im Falle kleinerer Krümmungen bereits beim ersten Belastungsversuch bekommen. Mit Rücksicht auf die Wirkung einer Anfangsdeformation (s. 2.23) sind diese kleineren Werte verständlich.

Auf entsprechende experimentelle Untersuchungen gestützt, fand Wolmir, daß ein Unterschied in der kritischen Spannung zwischen gelenkiger Lagerung und fester Einspannung im Falle $k > 24$ vernachlässigbar klein wird.

2.223 Die abmindernde Wirkung einer Anfangsdeformation auf die kritische Grenze

Die Wirkung einer Anfangsausbiegung auf den Beulvorgang, unter der Annahme, daß eine Vordeformation nach dem Ansatz

$$w_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \quad (24)$$

vorliegt, untersuchte Wolmir [51] mit dem Ansatz gemäß (19) und gelangte zu folgendem Zusammenhang:

$$p^* = \left[p_{cr,0}^* + \frac{\pi^2}{8} (\xi^2 + 3\xi\xi_0 + 2\xi_0^2) - k \left(\frac{10}{3\pi^2} \xi + \frac{4}{\pi^2} \xi_0 \right) \right] \frac{\xi}{\xi + \xi_0} \quad (25)$$

Die Auswertung der Gln. (25) ist in Bild 4 dargestellt.

Entsprechend dem Ansatz (24) gelten die Ergebnisse nur für Schalen mit $k < 24$.

2.224 Zylindrisches Schalenfeld unter Querbelastung

Der Lastfall gemäß Bild 5 wurde bisher nur für flache Schalen ($k < 24$) unter der Anwendung des Ansatzes (19) gelöst. Mit der Bubnow-Galerkin'schen Methode ergibt sich [51]:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^6}{256} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \right) \xi^3 - \frac{2\pi^2}{3} k \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right)^2} \xi^2 - \frac{\pi^2}{24} k \lambda^2 \xi^2 + \frac{\pi^2}{16} k^2 \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right)^2} \xi - \\ & - \frac{\pi^4}{16} p_x^* \xi + \frac{\pi^2}{192(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right)^2 \xi = q^* \end{aligned} \quad (26)$$

wobei:

$$p_x^* = -\frac{\pi^2}{8} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \nu \right) \frac{1}{1-\nu^2} \xi^2 + \frac{4}{\pi^2} k \frac{\nu}{1-\nu^2} \xi - \frac{4}{\pi^2} k \frac{\xi}{\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right)^2} \quad (27)$$

ist. Die Gl. (27) wurde unter der Annahme aufgestellt, daß die Schalenränder parallel zur x-Achse unbeweglich sind. Dabei wurde als Vereinfachung ausgenutzt, daß die Randkräfte p gleichmäßig verteilt sind. Die Ränder parallel zur y-Achse sind als frei beweglich angenommen, weshalb p_y an diesen Rändern den Wert 0 hat. Die Auswertung der Gl. (26) und (27) zeigt Bild 5.

Im kritischen Bereich gehören zu je einer Lastgröße drei verschiedene, ausgebogene Gleichgewichtslagen, von denen nur diejenige stabil ist, zu der die größte Deformation gehört. Für den Fall $k > 24$ sind nur Ansätze anwendbar, die auch antisymmetrische Glieder enthalten [51].

2.225 Gemeinsame Wirkung von axialem Druck und Querbelastrung

Dieser für das zu behandelnde Problem wesentliche Fall ist nur für Schalen mit geringer Krümmung ($k < 24$) gelöst mit den vereinfachten Annahmen von $\lambda = 1$ ($a = b$) und in beiden Richtungen frei beweglichen Rändern ($p_x = p_y = 0$) [51]. Der Ansatz ist hierfür wie in Gl. (19). Das Ergebnis lautet dann nach der Bubnow-Galerkin'schen Methode:

$$p^* = p_{kr,0}^* + \frac{\pi^2}{8} \xi^2 - \frac{10}{3\pi^2} k \xi - \frac{16}{\pi^4} q^* \frac{1}{\xi}; \quad p_{kr,0}^* = \frac{\pi^2}{3(1-\nu^2)} + \frac{k^2}{4\pi^2} \quad (28)$$

Die Auswertung der Gl. (28) ist aus Bild 6 zu ersehen, worin axiale Belastungs-Durchbiegungs-Diagramme in Abhängigkeit von stufenweise konstant gehaltenen Querbelastrungsgrößen dargestellt sind. Wenn q einen Grenzwert erreicht, zeichnet sich "Durchschlagen" durch eine schnell wachsende Verflachung an.

2.23 Die praktische Anwendung von 2.22

2.231 Die gebräuchliche Stabilitätsuntersuchung einer Tonnenschale

In der Praxis wird die vereinfachte Annahme getroffen, daß der Schalenteil einer Tonnenschale mit Randträgern unter gleichmäßig verteiltem Axialdruck stünde [9], [14], [32], [43], [49], [50]. Dementsprechend werden nur die in Abschnitt 2.21 - 2.22 angegebenen Formeln berücksichtigt. Im allgemeinen wird empfohlen, den in den Formeln enthaltenen Beiwert mit 0,16 - 0,20 anzunehmen,

bei einer gleichzeitigen Sicherheitszahl $n = 3,0$. Der so erhaltene Wert beträgt etwa $1/10$ der kritischen Spannung, die mit Hilfe der linearen Theorie ermittelt wurde.

Wenn es sich um ein mittleres Glied einer Tonnen-Reihe handelt, werden die allerdings weniger gesicherten Ergebnisse für die geschlossene Kreiszyinderschale benutzt.

2.232 Kritische Betrachtungen zur gebräuchlichen Stabilitätsuntersuchung einer Tonnenschale

Gegen die übliche Stabilitätsuntersuchung einer Tonnenschale sind nachfolgende Einwendungen vorzubringen:

1. Der der Bestimmung der kritischen Druckspannung zugrunde gelegte Lastfall - gleichmäßig verteilter Axialdruck - entspricht nicht den tatsächlichen Gegebenheiten.

Die Längsdruckspannung (σ_x) ist weder in Umfangs- noch in Längsrichtung konstant, sie ist in erster Näherung vielmehr sowohl in Längs- als auch in Querrichtung mit einer sinusförmigen Verteilung zu beschreiben. Weiterhin beschränkt sich diese sinusförmige Verteilung auf das gesamte Schalensegment nur im Falle sehr hoher Randträger, wobei die Nulllinie des Schalenträger-Querschnittes in den Randträgern liegt. Schalen mit sehr hohen Randträgern sind aber in der Baupraxis nur wenig gebräuchlich.

2. Gegenüber dem zur Berechnung herangezogenen Fall (2.22) entsteht die Längsdruckspannung in Wirklichkeit nur im Zusammenhang mit der Schalendurchbiegung infolge des auf den Gesamtquerschnitt wirkenden Längsbiegemomentes. Wie nachfolgend gezeigt wird, ruft eine Längskrümmung noch Begleiterscheinungen hervor, die in der Wolmir'schen Formel nicht enthalten sind, da diese Formel mit der Einschränkung abgeleitet wurde, daß die Randfasern nur in Längsrichtung frei dehnbar seien [51]. Eine Verschiebung der Randfasern in radialer Richtung wurde nicht berücksichtigt, obwohl sie tatsächlich auftritt.
3. Die direkte Wirkung der Querbelastrung auf den Schalenteil - durch welche zusätzliche Verformungen entstehen - bleibt bei der Berechnung gemäß der Lösung 2.22 ebenfalls außer acht. Die Lösung 2.25, bei der beide Wirkungen - Axialdruck und Querbelastrung -

berücksichtigt wurden, ist auf baupraktische Probleme nicht unmittelbar übertragbar, da hier die axiale Druckspannung eine Funktion der Querbelastrung ist.

.233 Analyse der Beanspruchung des Schalensfeldes einer Tonnenschale mit oder ohne Randträger

Die für den Verlust der Stabilität des Schalensegmentes im überkritischen Bereich maßgebenden Beanspruchungen sind die Längsdruck- und Zugspannungen und das Querbiegemoment. Der Einfluß der Querdrukkräfte bei Einzeltonnen und die Berücksichtigung der Längsstörung an den Endscheiben für den allgemeinen Fall sind für die Bestimmung der großen Deformation vernachlässigbar.

In Abhängigkeit von der Randträgerhöhe kann die Verteilung der Längsdruck- und Zugkräfte im Schalensegment verschieden sein. Bei einem homogenen, elastischen Material kann die Nulllinie des Gesamtquerschnittes von der Schwerachse des Schalensegmentes ab - Tonnenschale ohne Randträger - nach unten bis Unendlich - Tonnenschale mit unendlich großen Randträgern - hinauswandern, d.h. das Schalensegment kann in Abhängigkeit von der Randträgerhöhe, ausgehend von reiner Biegung bis gleichmäßig verteilten Axialdruck, beansprucht werden (s. Bild 7).

Ergebnisse für den Fall gleichmäßig verteilten Axialdruckes unter der Annahme, daß die Längsränder nur in Längsrichtung frei dehnbar sind, sind bereits bekannt.

Wird die Randträgerhöhe, von Unendlich ausgehend, stufenweise nach Null abgemindert, tritt eine wachsende Durchbiegung des Gesamtquerschnittes unter der Biegebeanspruchung ein. Dabei wird das Schalensegment anstatt auf mittigen auf exzentrischen Druck beansprucht.

Obwohl die Ergebnisse für reine Biegebeanspruchung schon vorhanden sind, wurden sie für Tonnenschalen in der praktischen Berechnung bisher nicht verwendet. Um zu erläutern, daß im Falle reiner Biegebeanspruchung ebenso ein Durchschlagsproblem vorliegt wie beim exzentrischen Druck, sind gemäß Bild 8 fol-

gende Überlegungen anzustellen: Die infolge des Biegemomentes auftretende Längskrümmung ergibt für ein ausgeschnittenes Längselement des Schalensegmentes im gekrümmten Zustand, daß die Resultierenden der Zug- bzw. der Druckkräfte nicht mehr eine gemeinsame Wirkungslinie haben. Aus Bild 8 ist zu ersehen, daß daraus sowohl von den Druck- als auch von den Zugspannungen eine nach unten bzw. nach oben gerichtete vertikale Resultierende folgt. Im Querschnitt betrachtet, ergeben die vertikalen Resultierenden eine Querbiegung, d.h. eine Verflachung des Querschnittes. Diese Verflachung bringt gleichzeitig auch die Abnahme des Anfangsträgheitsmomentes mit sich. Stellt man jetzt den Zusammenhang zwischen dem Biegemoment und der Krümmung dar, bekommt man statt der nach der elementaren Theorie geraden Linie eine parabolisch gekrümmte Kurve:

$$M = A\rho + B\rho^2$$

Diese Funktion, wie aus Bild 9 b ersichtlich, gibt ein maximales Biegemoment an, wobei noch das Gleichgewicht besteht.

Nachfolgend wird der oben beschriebene Verflachungseffekt nach Lundgren [32] als Brazier-Effekt bezeichnet.

Lösungen für den Verflachungseffekt gekrümmter und gerader Rohre wurden von Kármán [22], Brazier [7] und Chwalla [10], für flache, kreis- und V-förmige Querschnitte von Beluzzi [3/a] und Funk [16] aufgestellt. Diese Lösungen beschränken sich aber entweder auf kleine Deformationen, oder bei Berücksichtigung der großen Deformationen werden andere Näherungen getroffen. Die theoretisch vollständige Lösung leitete Kollár ab [28], [29], der für dünnwandige, einfachsymmetrische, offene Querschnitte mit gekrümmter Längsachse die genaue Differentialgleichung des Problems aufstellte; als Grenzfall ($R = \infty$) ergibt sich dann die Lösung für die Tonnenschale mit geraden Achsen, die zur Behandlung des dargestellten Problems anzuwenden ist.

Lösungen für den Übergang von Axialdruck zur reinen Biegebeanspruchung (Bild 7/b) sind noch nicht vorhanden.

Die im Institut durchgeführten experimentellen Untersuchungen befaßten sich bislang lediglich mit Fällen, wobei das Schalensegment der Tonnenschale mit sehr großer Exzentrizität gedrückt war.

2.24 Der Brazier-Effekt

Die von Kollár aufgestellte Differentialgleichung [28] hat allgemeine Gültigkeit für beliebige Krümmung der Längsachse. Da es sich im vorliegenden Bericht um den Grenzfall: "gerade Achse ($R = \infty$) und flacher Querschnitt" handelt, wird nachfolgend statt der aufwendigen, genauen eine vereinfachte Lösung mittels der Energiemethode entwickelt.

Läßt man auf beide Enden eines geraden Balkens mit flachem, kreisbogenförmigen Querschnitt ein konstantes Biegemoment einwirken (Bild 8), (wobei beide Biegemomente als Resultierende einer σ_x -Spannungsverteilung vorzustellen sind), wird die Längsachse infolge der Biegebeanspruchung gekrümmt. Wie bereits in 2.233 erläutert, tritt infolge der Längskrümmung eine Verflachung des Balkenquerschnittes auf. Da alle Querschnitte mit dem gleichen Biegemoment beansprucht sind, genügt es, ein einziges Längselement des Balkens zu betrachten. Um die theoretische Behandlung zu vereinfachen, stelle man sich die gesamte Durchbiegung aus zwei Teilen bestehend vor:

- a) Zunächst sei die seitliche Verschiebung behindert, damit tritt eine Durchbiegung bzw. eine Längsdehnung ϵ_1 ein, die sich wie beim gewöhnlichen vollwandigen Träger berechnen läßt:

$$\epsilon_1 = \frac{z_0}{R}$$

- b) Hebt man jetzt die Verformungsbehinderung der seitlichen Ränder auf, so tritt dann infolge der schon bestehenden Längskrümmung eine Verflachung ein, welche mit der gleichzeitigen Abminderung des Trägheitsmomentes eine größere Krümmung zur Folge hat. Der geänderten Krümmung entspricht dann wiederum eine größere Verflachung, welche erneut eine Krümmungsänderung hervorruft, usw.

Setzt man eine stabile Gleichgewichtslage voraus, tritt schließlich ein stabiler Verformungszustand in Abhängigkeit von dem während des Prozesses konstant gehaltenen Biegemoment ein.

Hat man den Übergangspunkt zwischen der stabilen und labilen Gleichgewichtslage erreicht, kann der Deformationszustand nicht mehr im Gleichgewicht mit dem Biegemoment gehalten werden und erfolgt das Durchschlagen des Querschnittes.

Bei der Formulierung des Energiekriteriums muß berücksichtigt werden, daß die im ersten Schritt hervorgerufene Durchbiegung bzw. die durch sie entstandene Dehnung automatisch auf die bekannte Gesetzmäßigkeit für reine Biegung eines Balkens mit in sich unverformten Querschnitt führt; dementsprechend können sie nachfolgend im Energiekriterium außer acht gelassen werden. Es wird also nur die Änderung der potentiellen Energie des Systems infolge der Verflachung berücksichtigt.

Wenn der Ausgangspunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt des Querschnittes angenommen wird, kann der flache kreisbogenförmige Querschnitt näherungsweise mit einer Parabel II. Ordnung beschrieben werden.

$$z_0 = d \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (29)$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß nur die infolge der Verflachung auftretende Änderung der potentiellen Energie zu suchen ist, läßt sich die vereinfachte Annahme treffen, daß der Schwerpunkt des ursprünglichen mit dem des verflachten Querschnittes übereinstimmt. Eine Berücksichtigung der Senkung des Schwerpunktes infolge der Längsbiegung wäre nur für die Darstellung der gesamten potentiellen Energie erforderlich. Die beschriebene Annahme ist mit der Aufstellung der allgemeinen Differentialgleichung unter Ausnutzung deren Ähnlichkeit zur Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens exakt beweisbar [28]. Hierauf wird im einzelnen nicht näher eingegangen, jedoch ist zu berücksichtigen, daß infolge des schon im Anfangsstadium flachen Querschnittes auch für weitere Verflachung ein parabelförmiger Verlauf der Querschnittsform angenommen werden kann. Dies bedeutet, daß die Schwerachse die jeweilige Querschnittshöhe im Verhältnis 1 : 2 aufteilt.

In diesem Sinne wird die veränderte Querschnittsform mit der unbekannten Funktion:

$$Z = Z_0 + w \quad (30)$$

bezeichnet. Damit kann die Änderung der Dehnung von ϵ_1 auf ϵ_2 infolge der Änderung der Querschnittsform von Z_0 auf Z in der Form

$$\Delta \epsilon = \frac{Z_0}{R} - \frac{Z}{R} \quad (31)$$

geschrieben werden.

In Kenntnis der Dehnungswerte ist es nun möglich, den Ausdruck der potentiellen Energie anzugeben. Hätte der Querschnitt nur den ersten durchgebogenen unverflachten Zustand erreicht, wären die auf die Endquerschnitte wirkenden Längsspannungen in jedem Querschnitt unverändert geblieben. Die Längskrümmung hat aber eine Verflachung des Querschnittes zur Folge, wodurch mit der gleichzeitigen Änderung der Längsspannungen ein Querbiegemoment auftritt. Die innere Arbeit entsteht dementsprechend aus der Arbeit des Querbiegemomentes infolge der Querkrümmungsänderung; die äußere Arbeit verursacht die Änderung der Längsspannungen auf Grund der veränderten Längsdehnungen.

Innere Arbeit:

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} EI w''^2 = \frac{Eh^3}{24} w''^2 \quad (32)$$

Äußere Arbeit:

$$\Delta A_a = \frac{1}{2} (n_{y1} \epsilon_1 - n_{y2} \epsilon_2) = \frac{Eh}{2} (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \quad (33)$$

Die Änderung der potentiellen Energie ist:

$$\Delta \Pi = \Delta A_i - \Delta A_a = \frac{Eh^3}{24} w''^2 - \frac{Eh}{2} (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \quad (34)$$

welche für den gesamten Querschnitt einen Minimum-Wert annehmen muß:

$$\Pi = \frac{Eh^3}{24} \int_{-b}^{+b} \left[w''^2 + \frac{12}{h^2} \left(\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z_0^2}{R^2} \right) \right] dx = \text{Min}! \quad (35)$$

Im zweiten Glied des Integrals wird auch die Verschiebungsfunktion eingeführt:

$$\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z_0^2}{R^2} = \frac{Z^2 - 2ZZ_0 + Z_0^2 + 2ZZ_0 - 2Z_0^2}{R^2} = \frac{(Z - Z_0)^2}{R^2} + \frac{2Z_0(Z - Z_0)}{R^2} \quad (36)$$

womit der endgültige Ausdruck der potentiellen Energie lautet:

$$\Pi = \frac{Eh^3}{24} \int_{-b}^{+b} \left[w'^2 + \frac{12}{h^2} \left(\frac{w^2}{R^2} + \frac{2wz_0}{R^2} \right) \right] dx = \text{Min!} \quad (37)$$

(37) enthält nur die unbekannte vertikale Verschiebungsfunktion, welche mit Hilfe einer Ansatzfunktion nach der Ritz'schen Methode näherungsweise bestimmt werden kann. Da in (37) zu jeder Phase der Verflachung eine zugehörige Längskrümmung zu finden ist, welche bei der Einstellung des Minimums der potentiellen Energie als Konstante betrachtet werden kann, muß der nachfolgend angenommene Ansatz die Längskrümmung in irgendeiner Form enthalten. Mit der Einführung des Längskrümmungsparameters von β :

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{hR}} \quad (38)$$

wird zunächst angenommen, daß der Zusammenhang zwischen der Verschiebung und Längskrümmungsänderung quadratisch ist.

Wählt man als Ansatz eine Parabel II. Ordnung:

$$w = A \frac{d}{\beta^2} \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (39)$$

bekommt man, die entsprechenden Ableitungen in den Ausdruck der potentiellen Energie eingesetzt, das bestimmte Integral:

$$I = \frac{Eh^3}{24} \int_{-b}^{+b} \left\{ \frac{4A^2 d^2}{(\beta b)^4} + \frac{12}{h^2} \left[\frac{A^2 d^2}{\beta^4 R^2} \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2Ad^2}{\beta^2 R^2} \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} dx \quad (40)$$

Nach Durchführung der Integration:

$$I = \frac{Eh^3}{3} \left[\frac{A^2 d^2 b}{(\beta b)^4} + \frac{4A^2 d^2 b}{45} + \frac{8Ad^2 b \beta^2}{45} \right] \quad (41)$$

enthält das gewonnene Ergebnis nur die frei gewählte Konstante A . Gemäß der Ritz'schen Methode differenziert man nach A :

$$\frac{\partial I}{\partial A} = 2A \left[\frac{d^2 b}{(\beta b)^4} + \frac{4d^2 b}{45} \right] + \frac{8d^2 b \beta^2}{45} = 0 \quad (42)$$

woraus dessen Wert bestimmt werden kann:

$$A = - \frac{\beta^2}{\frac{11,25}{(\beta b)^4} + 1} \quad (43)$$

Drückt man das Längsbiegemoment mit der Verschiebungsfunktion aus:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{-b}^{+b} n_y z dx = Eh \int_{-b}^{+b} \frac{z^2}{R} dx = \\
 &= \frac{Eh}{R} \int_{-b}^{+b} z_0^2 dx + \frac{2Eh}{R} \int_{-b}^{+b} z_0 w dx + \frac{Eh}{R} \int_{-b}^{+b} w^2 dx \quad (44) \\
 &\quad (z = z_0 + w; \quad z^2 = z_0^2 + 2z_0 w + w^2)
 \end{aligned}$$

und führt die entsprechende Integration durch:

$$\frac{MR}{E} = h \left[\frac{8d^2 b}{45} + \frac{2A}{\beta^2} \frac{8d^2 b}{45} + \frac{A^2}{\beta^4} \frac{8d^2 b}{45} \right] \quad (45)$$

erhält man nach gewissen Umformungen den gesuchten Zusammenhang:

$$\frac{M}{EI_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{h} = (\beta b)^2 \left[1 - \frac{2}{\frac{11,25}{(\beta b)^4} + 1} - \frac{1}{\left(\frac{11,25}{(\beta b)^4} + 1 \right)^2} \right] \quad (46)$$

Das Ergebnis, das mit der exakten Lösung der Differentialgleichung des Problems gewonnen werden kann, lautet nach Kollár [29]:

$$\frac{M}{EI_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{h} = (\beta b)^2 \gamma_2 \quad (47)$$

wobei

$$\gamma_2 = \frac{1}{1 + 0,160(\beta b)^4 + 0,084(\beta b)^6} \quad (48)$$

Wird auch der zwischen den Klammern stehende Ausdruck von (46) umgeformt, erhält man

$$\gamma_2^* = \frac{1}{1 + 0,179(\beta b)^4} \quad (49)$$

Der Vergleich von (48) und (49) zeigt, daß deren Unterschied sehr gering ist, d.h. der Ansatz nach (39) ist als gute Näherung zu betrachten (s. Bild 9/b).

Für eine Ergänzung des Ansatzes von (39) gäbe es noch zwei Möglichkeiten: entweder höhere Potenzen von (βb) in den Ausdruck hineinzuziehen oder das Verschiebungspolynom mit Gliedern von höherer Ordnung zu ergänzen. Die Übereinstimmung mit dem durch die exakte Lösung gewonnenen Ergebnis erfordert dies aber nicht.

Wird die Funktion von (46) ausgewertet, bekommt man die im Bild 9/b dargestellte Kurve, woraus sich für das kritische Biegemoment

$$M_{kr} = 0,374 E \frac{h^2 d^2}{b} \quad (50)$$

und für die kritische Längskrümmung

$$\frac{1}{R_{kr}} = 0,976 \frac{h}{b^2} \quad (51)$$

ergeben. Nach gewissen Umformungen kann die maximale kritische Druckspannung angegeben werden:

$$\sigma_{kr} = 0,086 E \frac{h}{R_{\text{quer}}} \quad (52)$$

Wie zu ersehen ist, beträgt der Beiwert von (52) ungefähr nur ein Drittel des Wertes von (17). Dabei ist zu bemerken, daß Querbiegemomente beim Verflachungseffekt infolge der geringsten Längsbiegebeanspruchung auftreten; demgegenüber treten beim Beulen Biegebeanspruchungen in Querrichtung erst im Augenblick des Stabilitätsverlustes auf.

2.3 Übertragung der Ergebnisse der Elastizitätstheorie auf Stahlbeton-Tonnenschalen

2.31 Allgemeines

In 2.233 wurde eingehend beschrieben, wie sich eine elastische Tonnenschale mit veränderlicher Randträgerhöhe d ($0 < d < \infty$) verhält. Dabei ist es zu bemerken, daß für freistehende Stahlbeton-Tonnenschalen das meist angewandte Verhältnis von Randträgerhöhe zur Schalenstichhöhe kleiner als $1 : 1 - 2 : 1$ beträgt; d.h. das Schalensegment ist im allgemeinen mit großer Exzentrizität gedrückt. Damit hat die Beulgefahr bei Stahlbeton-Tonnenschalen, ausgebildet auf diese Art, eine geringere Bedeutung als die Berücksichtigung des Verflachungseffektes.

Die von der Elastizitätstheorie abgeleitete und in 2.24 ausführlich behandelten Ergebnisse wurden für homogenes, elastisches Material abgeleitet; daher sind sie für eine Stahlbeton-Tonnenschale in gerissem Zustand nicht verwendbar.

Zur Aufstellung einer auch für Stahlbeton befriedigenden Lösung müssen folgende Unterschiede berücksichtigt werden:

1. Im Gegensatz zum homogenen Querschnitt nimmt in einem Stahlbetonquerschnitt die meist konzentriert eingelegte Stahlbewehrung die Zugkräfte auf. Dieser Unterschied, wie aus Bild 10 zu ersehen ist, führt zu einem größeren Hebelarm der inneren Kräfte, d.h. zu einer schnelleren Verflachung.
 2. Bei einem Stahlbetonquerschnitt ändert sich die Biegesteifigkeit $E.I$ nicht nur infolge der Verflachung (was eine Verringerung des Trägheitsmomentes I zur Folge hat), sondern auch infolge der Abminderung des E-Moduls (wegen der plastischen Eigenschaften des Betons). Diese zusätzliche Abminderung der Steifigkeit ist jedoch im allgemeinen erst dann fühlbar, wenn die Erschöpfung des Querschnittes bei höheren Betondruckspannungen eintritt.
 3. Das inhomogene Material (Stahlbeton) läßt bei der Beurteilung der Bruchsicherheit noch die Möglichkeit offen, daß der Querschnitt infolge Querbiegung schon früher versagt als infolge eines Versagens der Betondruckzone oder der Stahlbewehrung durch Beanspruchung in Längsrichtung. Dementsprechend muß hier das Querbiegemoment ebenfalls in Betracht gezogen werden, während es bei einem homogenen Material keine besondere Bedeutung hat.
- 2.32 Iteratives Verfahren zur Bestimmung der Momenten-Tragfähigkeit eines Stahlbeton-Tonnenschalenquerschnittes unter Berücksichtigung des Verflachungseffektes
-

2.321 Annahmen

Grundsätzlich wird angenommen, daß die Nulllinie in dem Schalen-segment der Tonnenschale liegt, d.h. der Schalenteil selbst hauptsächlich als gebogenes und nicht als gedrücktes Element betrachtet werden kann.

1. Auf die Tonnenschalen wirken an beiden freien Enden konstante Biegemomente.
2. Der kreiszylindrische Schalenquerschnitt ist flach genug, um die Annahmen

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &\approx \sin \varphi \approx \varphi \\ s &\approx b \end{aligned}$$

zu erfüllen.

3. Der Querschnitt befindet sich von Anfang an in gerissenem Zustand.
4. Die Bernoulli-Nauvier-Hypothese ist gültig.
5. Der E-Modul kann durch einen konstanten Durchschnittswert (Sekanten-Modul) ersetzt werden.
6. Zur Berechnung des abgeminderten Trägheitsmomentes kann der deformierte Querschnitt weiterhin als kreisförmig angenommen werden.
7. Wenn die Randträgerhöhe $d = 0$ ist, bleibt die auf dem Bogen gemessene Länge der Druckzone während der Deformationen konstant. Im Falle $d \neq 0$ wird selbstredend diese Annahme entfallen.

3.22 Die Ableitungen der Iterationsformeln

Die Bedeutung aller im nachfolgenden gebrauchten Bezeichnungen, sowie Abkürzungen ergibt sich aus Bild 11.

Werden die den Anfangszustand (Index 0) bzw. einen beliebigen, deformierten Zustand (Index i) beschreibenden geometrischen Größen als bekannt vorausgesetzt, kann die bezogene Nulllinienlage aus der Gleichheit der statischen Momente der Druck- und Zugzone ermittelt werden:

$$S_{x0} = S_{xz} \quad (53a)$$

$$S_{x0} = 2 R_i \varphi_{xi} h \cdot \frac{2}{3} f_{xi} \quad (53b)$$

$$S_{xz} = 2 n F_e (f_i - f_{xi} + d) \quad (53c)$$

Die Stichhöhen können auch durch die Zentriwinkel ausgedrückt werden:

$$f = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{R \varphi^2}{2} \quad (54)$$

Setzt man jetzt Gl. (53b-c) in Gl. (53a) ein, dann ergibt sich unter Ausnützung von Gl. (54) und nach einigen Umformungen die folgende kubische Gleichung zur Bestimmung des zur Nulllinienlage gehörenden Zentriwinkels:

$$\frac{2}{3} R_i^2 h \varphi_{xi}^3 + n F_e R_i \varphi_{xi}^2 - n F_e (2d + R_i \varphi_i^2) = 0 \quad (55)$$

Ist φ_{xi} bekannt, kann das Trägheitsmoment I_i bestimmt werden:

$$I_i = 0,178 h f_{xi}^2 \frac{b_{xi}}{2} + 2 \varphi_{xi} R_i h \cdot \frac{4 f_{xi}}{9} + 2 n F_e (f_i - f_{xi} + d)^2$$

Nach Einführung des Zentriwinkels für alle geometrischen Größen erhält man:

$$I_i = 0,2667 R_i^3 h \varphi_{xi}^5 + 2 n F_e \left(\frac{R_i \varphi_i^2}{2} - \frac{R_i \varphi_{xi}^2}{2} + d \right)^2 \quad (56)$$

Die an der Halbseite auftretende Zugkraft wird dann:

$$N_i = \frac{M_i}{I_i} \left(\frac{R_i \varphi_i^2}{2} - \frac{R_i \varphi_{xi}^2}{2} + d \right) n F_e \quad (57)$$

Die nach oben gerichtete Resultierende ΔN_i kann man - unter Ausnutzung der aus Bild 11/b hervorgehenden Ähnlichkeit - mit Hilfe des Vektordreieckes:

$$\Delta N_i : N_i = 1 : \varrho \quad (58)$$

bestimmen. Da für die Krümmung bekanntlich der Zusammenhang

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E J}$$

besteht, kann ΔN_i in Gl. (58) durch

$$\Delta N_i = \frac{M_i N_i}{E_b I_i} \quad (59)$$

ausgedrückt werden.

Nachdem somit die auf das Schalensegment in Querrichtung wirkenden Biegekräfte bekannt sind, soll nunmehr die von diesen erzeugte Durchbiegung Δf_1 berechnet werden. Ersetzt man zur Vereinfachung des Rechenaufwandes die parabelförmige Momentenlinie durch eine trapezförmige (s. Bild 12), ergibt sich für die Berechnung der Durchbiegung des Scheitelpunktes folgende Gleichung:

$$\Delta f_i = \frac{4\Delta N_i}{E_b h^3} \left[R_i^3 \left(\varphi_i - \frac{\varphi_{xi}}{3} \right)^3 + R_i^3 \varphi_{xi} \left(\varphi_i - \frac{\varphi_{xi}}{3} \right) \left(\varphi_i - \frac{\varphi_{xi}}{6} \right) \right] \quad (60)$$

während das maximale Biegemoment M_y in Querrichtung

$$M_{yi} = \Delta N_i R_i \left(\varphi_i - \frac{\varphi_{xi}}{3} \right) \quad (61)$$

wird.

2.323 Beschreibung des Rechenvorganges

Das Wesentliche des Berechnungsverfahrens besteht darin, daß man in Abhängigkeit vom wachsenden Biegemoment in Längsrichtung M_j Funktionen $\Delta f_1 (M_j)$ herleitet, wobei jede Kurve $\Delta f_1 (M_j)$ wiederholt, wie sich das wachsende Biegemoment auf einen Querschnitt mit der Stichhöhe f_1 auswirken würde, wenn die Rückwirkung der Stichhöhenänderung auf die in Längsrichtung wirkenden Schnittgrößen während dieses Prozesses unberücksichtigt bleibt. Jeder Punkt dieser Kurven dient also nur als Ausgangswert für eine Iteration zur Bestimmung des tatsächlichen Durchbiegungsverlaufes $\delta f_j (M_j)$. Dabei muß die unterschiedliche Bedeutung von Δf_1 und δf_j beachtet werden.

Die Werte f_i werden folgendermaßen gebildet:

$$f_i = f_0 - i \cdot \Delta$$

wobei Δ etwa zwischen $h/2$ und h zu wählen ist; i ergibt sich aus

$$\min f_i \approx f_0/2$$

d.h. für kleinere Stichhöhen als die Hälfte der Anfangsstichhöhe ist es nicht nötig, die $\Delta f_1 (M_j)$ -Kurve zu ermitteln.

Für M_j (Moment in Längsrichtung) kann das Schrittmaß beliebig gewählt werden, doch empfiehlt es sich, zunächst den folgenden Maximalwert des Biegemomentes als Anhaltspunkt auszurechnen:

$$M_{max} = \frac{\sigma_{e,fließ} \cdot I_0}{\left(\frac{R\varphi_0^2}{2} - \frac{R\varphi_{x0}^2}{2} + d\right)n}$$

Diese Größe wäre das maximale Biegemoment in jenem Falle, daß sich der Ausgangsquerschnitt infolge Fliegebeanspruchung nicht deformieren würde und daß die Stahlspannung die Fließgrenze erreichte. Demnach kann das Schrittmaß für M_j anfangs etwa mit $0,1 - 0,15 M_{max}$ gewählt werden; eine feinere Abstufung wird erst in der Nähe des zu erwartenden Bruches erforderlich.

Nachdem alle Hilfsgrößen - zweckmäßig in Tafeln zusammengestellt - berechnet sind, kann mit der Bestimmung des tatsächlichen Durchbiegungsdiagrammes $\delta f_j(M_j)$ begonnen werden. Den ersten Wert, der zum M_1 gehört, kann man ohne Iteration als $\delta f_1 = \Delta f_0(M_1)$ annehmen. Das Biegemoment M_2 wirkt auf einen Querschnitt mit der Stichhöhe $f = f_0 - \delta f_1$, die von ihm erzeugte Durchbiegung soll mit einer Interpolation zwischen den berechneten Werten $\Delta f_0(M_2)$ und $\Delta f_1(M_2)$ ermittelt werden. Es ist $\delta f_2 = J + \Delta f_0(M_2)$, wobei J den mittels Interpolation zu gewinnenden Bruchteil darstellt. Im allgemeinen gilt weiterhin:

$$\delta f_j = J + \Delta f_i(M_j)$$

Hierbei bezeichnet i jenen bereits berechneten deformierten Zustand des Querschnittes, der von unten her dem Wert δf_{j-1} am nächsten kommt. Erreichte δf_j die Größenordnung der Schalendicke, müssen von hier ab alle Werte mehrmals iteriert werden: der Bruchteil J muß innerhalb eines Iterationsschrittes ohne Änderung des Längsbiegemomentes mehrmals berechnet werden. Die Berechnung ist beendet, wenn das Iterationsverfahren zur Bestimmung von J divergiert.

2.33 Schlußfolgerung

Das vor angegebene iterative Verfahren beschreibt nur den einfachen Fall: das Verhalten einer Tonnenschale unter der Wirkung eines konstanten Biegemomentes. Diese Vereinfachung ermöglichte infolge des gleichen Verhaltens aller Querschnitte, daß man sich auf Behandlung eines Querschnittes beschränken konnte. Dabei wurde die vereinfachte Annahme getroffen, daß sich der Querschnitt von Anbeginn an im gerissenen Zustand befindet. Ebenfalls wurde die Änderung des E-Moduls vernachlässigt. Um den Einfluß der aufgezählten Vernachlässigungen zu untersuchen, werden sie nachfolgend im einzelnen überprüft.

Die Annahme, daß der Querschnitt von Anfang an gerissen sei, bedeutet, daß die auf Grund dieser Annahme herleitbare Biegemoments-Deformationskurve im Anfangsbereich nicht der Wirklichkeit entspricht. Erreicht aber die Schale den gerissenen Zustand, erfährt sie eine verhältnismäßig rasche Abminderung der Steifigkeit, d.h.

die Annahme wird von hier ab gültig. Unter der Voraussetzung, daß es sich um keine überbewehrte Schale handelt, wird der gerissene Zustand normalerweise schon unter der Gebrauchslast erreicht. Dadurch wird die Schale auch gegen dynamische Einwirkungen gesichert, welche infolge einer plötzlichen Rißbildung unter hoher Last entstehen können (siehe Modellversuchsbeschreibung!).

Eine Berücksichtigung der Änderung des E-Moduls würde einen schnelleren Steifigkeitsverlust mit sich bringen. Um die Wichtigkeit dieser zusätzlichen Abminderung überprüfen zu können, muß man die Betondruckspannung kennen, die beim Versagen des Querschnittes in der Druckzone herrscht. An Hand der Abmessungen und des Bewehrungsgehaltes von bereits erstellten Tonnenschalen läßt sich feststellen, daß im Gebrauchszustand die Stahlspannung im Vergleich zur Fließgrenze relativ höher liegt als die Betondruckspannung zur Prismenfestigkeit. Andererseits zeigten die durchgeführten Rechenbeispiele gemäß 2.32, daß die Betondruckspannung nach dem Erreichen der Fließgrenze des Stahles nicht einmal 60 % der Prismenfestigkeit überschritten hat. Wie bekannt, ist die Änderung des E-Moduls bis zu 60 - 70 % der Bruchspannung noch nicht so rasch, daß der Gebrauch eines zur Hälfte der Betondruckfestigkeit gehörenden Sehnenmoduls einen groben Fehler verursachen würde. Es gibt

aber die Möglichkeit, die Änderung des E-Moduls Schritt für Schritt mit der Berechnung der zur jeweiligen Verflachungsphase gehörenden Betondruckspannung zu berücksichtigen, - allerdings wird der Rechenaufwand in keinem Verhältnis zur gewonnenen Genauigkeit stehen. In dieser Weise wäre auch der Einfluß des Kriechens zu erfassen, wenn das Verhalten eines solchen Schalentragwerkes unter Langzeitbelastung rechnerisch wiedergegeben werden soll.

Die Wirkung einer entlang der Längsachse veränderlichen Momentenlinie und der Einfluß der Endausbildung der Tonnenschale auf das Tragverhalten sind zur Zeit noch wenig erforscht. Nach den im Institut durchgeführten Kleinmodellversuchen an elastischem Material ergab sich, daß der Unterschied im kritischen Biegemoment zwischen

einer Tonnenschale mit freien Enden unter konstanter Biegemomentbeanspruchung

und einer mittellangen Tonnenschale mit Endscheiben unter gleichmäßig verteilter Querbelastrung (veränderliche Momentenlinie)

sogar mehr als 100 % sein kann. Andererseits ist aber wohl anzunehmen, daß die Wirkung der beiden Einflüsse von der Rißbildung in der Nähe des Mittelquerschnittes auch für mittellange Tonnenschalen stark herabgesetzt wird. Diese Annahme läßt sich an Hand der im Institut durchgeführten Modellversuche bestätigen (siehe 3.35).

3. Experimentelle Untersuchungen von Modellschalen

3.1 Allgemeines

Wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt, war es notwendig, experimentelle Versuche durchzuführen, um die theoretischen Überlegungen zu unterstützen. Wegen der hohen Kosten, die Untersuchungen an Tonnenschalen aus Stahlbeton in wirklichkeitsnaher Größe verursachen, mußten zunächst Versuche an Modellen durchgeführt werden. Der Modell-Werkstoff sollte in seinem Verformungsverhalten und sonstigen Materialeigenschaften im möglichst größten Maße dem Beton entsprechen. Außerdem mußte gewährleistet sein, daß die Zugzone der Versuchsmodelle nicht durch vorzeitigen Bruch infolge zu geringer Zugfestigkeit des Modellwerkstoffes versagte. Diesen Forderungen schien der Werkstoff Asbestzement am besten entsprechen zu können. Einem vorzeitigen Versagen der Zugzone in-

folge Überschreitens der Zugfestigkeit des Asbestzementes konnte dadurch begegnet werden, daß bei der Fertigung im frischen Zustand im unteren Rand der Zugzone dünne Rundstähle eingelegt wurden. Des weiteren wurden noch Schalenmodelle aus Kunststoffmörtel angefertigt und untersucht. Die in einer früheren Arbeit veröffentlichten Versuche an Plexiglas-Modellschalen wurden ebenfalls berücksichtigt [31].

Den Firmen Fulgurit und Eternit sei hier besonders gedankt. Sie ermöglichten durch ihr Entgegenkommen bei der Herstellung der Asbestzement-Modellschalen erst die Modellversuche. Von der Firma Chemische Werke Hüls wurde freundlicherweise der Kunststoffmörtel zur Verfügung gestellt.

.2 Modellwerkstoff

3.21 Asbestzement

3.211 Allgemeines

Das für die Modellversuche verwendete Asbestzementmaterial wurde sowohl bei der Firma Fulgurit als auch bei der Firma Eternit aus der laufenden Produktion entnommen. Für die Modellherstellung wurde ungepreßte Asbestzement-Pappe, wie sie normalerweise für die Herstellung von Platten, Welltafeln usw. gebraucht wird, verwendet. Das Asbestzement-Material erhärtet ohne zusätzliche Behandlung an der Luft. Die Firma Eternit benutzte auf unseren Wunsch zur Herstellung einzelner Modellschalen auch Asbestzement-Material, das in seinem Aufbau der produktionsüblichen Autoclaven-Mischung entsprach und härtete die Versuchskörper im eigenen Autoclaven.

3.212 Materialeigenschaften

- Aus den untersuchten Modellschalen wurden nach der Versuchsdurchführung Materialproben zur Bestimmung der Zug-, Druck- und Biegezugfestigkeit und des E-Moduls entnommen. Außerdem wurden diese Untersuchungen auch an gesondert hergestellten Materialproben durchgeführt, die gleiches Alter und Beschaffenheit wie das Material der Versuchsschalen hatten.

In den Bildern 13, 17 und 19 sind die Formen der Versuchskörper und die Versuchseinrichtungen für die Durchführung der Zug-, Druck- und Biegezugversuche wiedergegeben. Die Dehnungsmessungen erfolgten sowohl mit Hilfe von Meßuhren (Meßgenauigkeit 1/100 mm) als auch mit Dehnungsmeßstreifen. In den Bildern 14, 15, 16, 18 und 20 sind die Diagramme der untersuchten Proben dargestellt.

3.22 Kunststoffmörtel

Neben den Asbestzement-Schalen wurde versuchsweise eine Serie von 4 Modellschalen aus einem Kunststoffmörtel aus ungesättigtem Polyesterharz "Vestopal" in Verbindung mit Quarzmehl und Normensand von der Firma Chemische Werke Hüls angefertigt und dem Institut zur Verfügung gestellt. Bei der Ermittlung der Zug-, Biegezug- und Druckfestigkeit zeigte sich, daß dieser Werkstoff für die Durchführung der Modelluntersuchungen nicht geeignet war. Die Arbeitslinie wies keinen erkennbaren Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich auf. Der Bruch erfolgte plötzlich bei noch geradlinigem Verlauf der Arbeitslinie.

3.23 Plexiglas

Der Modellwerkstoff Plexiglas, dessen zeitabhängige große Kriechverformungen bei den Untersuchungen hinsichtlich der Wirkung einer Vorverformung auf das Beulverhalten von Tonnenschalen ausgenutzt wurden, ist bereits in einem früheren Bericht eingehend beschrieben worden [31].

3.3 Modellversuche

3.31 Beschreibung der Modellherstellung

3.311 Asbestzement-Modelle

Die Versuchsschalen wurden im Werk Wunstorf/Hannover der Firma Fulgurit und im Werk Berlin der Firma Eternit durch geübte Facharbeiter dieser Firmen im Beisein der Mitarbeiter des Instituts hergestellt. Damit bei der Fertigung die Versuchsschalen ihren vorgeschriebenen geometrischen Abmessungen gemäß angefertigt werden konnten, wurden Negativ-Matrizen aus Gips bzw. Aluminium, entsprechend Bild 21, vom Institut bereitgestellt.

Die frische Asbestzement-Pappe wurde dann auf die Negativ-Matrizen so aufgelegt und mit der Hand glattgestrichen, daß sich keine Luftblasen bilden konnten. Die Dicke der frischen Asbestzement-Pappe betrug für den Schalenteil aus betrieblichen Gründen rd. 3 bis 3,8 mm. Die Randträger und Binderscheiben mußten, da sie 10 mm bzw. 7 mm dick werden sollten, zweilagig hergestellt werden.

Dadurch war es möglich, die in Bild 22 dargestellte Bewehrung, bestehend aus je einer Gewindestange $\varnothing 2,9$ mm, in die Randträger

einzubringen.

Die äußere Formgebung der Versuchsmodelle wurde unter Zuhilfenahme der Profilleisten und mittels Nachglätten erreicht. Der Verbund sowohl zwischen den Asbestzementschichten der Randträger und der Einderscheibe, aber auch zwischen Asbestzement und Bewehrung, wurde durch das Aneinanderdrücken der frischen Asbestzement-Pappen mittels der Profilleistung und eines im frischen Zustand auf die inneren Berührungsflächen aufgestrichenen Spezialleimes erreicht. Die Haftung der Bewehrung erhöht sich noch durch die Oberflächenform der Gewindestangen. Die Maßgenauigkeit der angefertigten frischen Modelle war einer im Maßstab 1:1 hergestellten Betonschale vergleichbar. Nach der Herstellung wurden die Modelle zwei Tage unter nassen Tüchern gelagert und danach entschalt. Zu diesem Zeitpunkt war der Asbestzement soweit erhärtet, daß sich die Modelle beim Ausschalen nicht mehr deformieren konnten. Die mit der Autoclavenmischung hergestellten Versuchskörper blieben nach der Herstellung 18 Stunden im Autoclaven; danach waren sie erhärtet und wurden entschalt. Die Lagerung der Versuchsmodelle im Institut erfolgte bei 20° C Raumtemperatur und 70 % relativer Luftfeuchte in einem Sandbett, damit die evtl. auftretenden Kriechverformungen infolge Eigengewicht ausgeschaltet werden konnten. Es gelang allerdings nicht, Schwindverformungen hinreichend auszuschließen.

3.312 Kunststoffmörtelmodelle

Bei der Herstellung wurde ebenfalls eine Negativ-Matrize benutzt. Der im plastischen Zustand eingebrachte Kunststoffmörtel war gut der gewünschten Schalenform anzupassen. Eine Bewehrung der Randträger war nicht vorgesehen, da das Material im ausgehärteten Zustand über eine hohe Zugfestigkeit verfügt. Die Maßgenauigkeit der Modelle war ausreichend.

3.313 Plexiglas

Da die Plexiglas-Modelle bereits in einer früheren Arbeit [31] eingehend beschrieben wurden, wird die Modellherstellung nicht mehr behandelt.

3.33 Versuchsdurchführung

Nach dem Aufbau der Modellschalen in die Versuchseinrichtung wurden zuerst die Nullablesungen der Dehnungs- und Verformungsmessungen im unbelasteten Zustand durchgeführt. Danach erfolgte eine stufenweise Laststeigerung mit den dazugehörigen Dehnungs- und Verformungsmessungen.

Bis zu etwa 60 % der Drucklast erfolgt die Laststeigerung in Intervallen von $34 \times 500 \text{ g} = 17 \text{ kg}$; danach wurden 200 g und kurz vor dem zu erwartenden Bruch je Büchse 100 g eingelegt.

Die Schale wurde nach jeder Laststufe völlig entlastet, wodurch die verbleibende Deformation festgestellt werden konnte. Mit den Dehnungs- und Durchbiegungsmessungen wurde nach dem voraussichtlichen Abschluß der Kriechverformung begonnen. Eine relativ hohe Zugfestigkeit des Asbestzementes bedingte, daß die Rißbildung im allgemeinen erst bei höheren Laststufen eintrat. Um die dynamische Mehrbelastung als Folge eines plötzlich auftretenden Risses vermeiden zu können, war ein sofortiges Entlasten hierbei erforderlich, was allerdings nicht immer rechtzeitig gelang.

3.34 Versuchsergebnisse

Das Versuchsprogramm gliederte sich wie folgt auf:

Serie A:(Testserie)

Diese Serie sollte zeigen, ob Asbestzement-Modelle in diesem relativ kleinen Maßstab als Verbundkonstruktion brauchbar wären. Es wurden Modelle mit 2 cm bzw. 3 cm Stichhöhe angefertigt, die Aufschluß geben sollten über die anzuwendende Herstellungstechnik und die für die Versuche erforderlichen Belastungs- und Meßeinrichtungen. Entsprechend diesen Zielsetzungen wurden die Versuche nur qualitativ ausgewertet.

Serie B:

Auf Grund der bei Serie A gewonnenen Erfahrungen sollte Serie B (bestehend aus 4 Modellen) den ersten Messungen dienen. Infolge einiger herstellungsbedingter Mängel (zu geringe Zugfestigkeit und große Schwindverformungen infolge zu sehr genäßter Asbestzementpappe, ungenau liegender Stahlbewehrung und zu geringer Haftfestigkeit zwischen Stahl und Asbestzement) war diese Serie jedoch, wie sich während der Versuche herausstellte, für Messungen nicht brauchbar. Bei allen vier Modellen erfolgte ein frühzeitiger Biegebruch.

Serie C:

Die Schwindverformungen waren, wie auch bei den nachfolgend aufgeführten Modellen bei dieser Serie auch beträchtlich groß (in Größenordnung der Schalendicke). Ansonsten entsprachen die vier Versuchsstücke den gestellten Anforderungen.

Modell C, 1:

Stichhöhe 2 cm; Vorverformung in Schalenmitte 2,5 mm;

Traglast = 85,6 kg, Messung mit Meßuhren.

Modell C, 2:

Stichhöhe 2 cm; Vorverformung in Schalenmitte 2,6 mm;

Traglast = 85,2 kg. Messung mit Meßuhren und Dehnungsmeßstreifen.

Bei beiden Modellen mit Stichhöhe 2 cm war eine dem Stahlbeton ähnliche Rißbildung zu beobachten; Der Bruch erfolgte nach der Rißbildung ähnlich einem Biegebruch bei Balkentragwerken, was auf die noch vorhandene Momententragfähigkeit deutlich hinweist.

Die Belastungs-Durchbiegungs-Diagramme für Schalen C,1 und C,2 sind im Bild 26 zu sehen.

Modell C, 3:

Stichhöhe 3 cm; Vorverformung in Schalenmitte 1 mm;

Traglast = 138 kg, Messung mit Meßuhren.

Modell C, 4:

Stichhöhe 3 cm, Vorverformung in Schalenmitte 1 mm;

Traglast 138 kg. Messung mit Meßuhren und im Scheitel und am Rande mit Dehnungsmeßstreifen.

Die Meßergebnisse sind im Bild 25 dargestellt.

Bei den Modellen mit Stichhöhe 3 cm erfolgte ein sofortiger Bruch ohne erkennbare Rißbildung. Die Ursache des Versagens ist auf die nicht ausreichende Haftfestigkeit der beiden Asbestzementlagen des Randbalkens zurückzuführen.

Serie D:

Die Serie D bestand aus sechs Modellen, die aber für die Untersuchungen nicht brauchbar waren, da ein Teil der Modelle zum Zeitpunkt der Prüfung zu große Kriechverformungen (bis $\approx 1,5$ cm) aufwies und ein Teil beim Abnehmen von den Negativmatrizen beschädigt wurde. Daraufhin wurden dann statt der Gipsmatrizen zerlegbare Aluminiummatrizen gebaut, so daß die Versuchsmodelle nicht mehr beschädigt werden konnten.

Die Versuchsserien A - D fertigte für das Institut die Firma "Fulgurit" an. Weitere zwei Serien (E und F) wurden von der Firma "Eternit" hergestellt.

Serie E:

Serie E bestand aus vier Modellen des herkömmlichen Materials und aus zwei Modellen aus einer Autoklavenmischung.

Modell E, 1:

Stichhöhe 2 cm; Vorverformung 4,6 mm in Schalenmitte;
Traglast = 44,2 kg; Messung mit Meßuhren. Der frühzeitige Bruch trat infolge Längsaufspaltung der Randträger und des dadurch bedingten völligen Aufhebens des Verbundes mit der Bewehrung ein.

Modell E, 2:

Stichhöhe 2 cm; Vorverformung 4,8 mm in Schalenmitte;
Traglast = 58,6 kg; Messung mit Meßuhren. Den Bruch verursachte die gleiche Erscheinung, wie unter E,1 beschrieben.

Modell E, 3:

Stichhöhe 3 cm; Vorverformung 2,5 mm in Schalenmitte;
Traglast = 127,5 kg; Messung mit Meßuhren. Das Versagen verursachte ein Schubbruch in der Binderscheibe in der Nähe des Auflagers.

Modell E, 4:

Stichhöhe 3 cm. Das Modell konnte nicht geprüft werden, da die eingelegte Bewehrung keine Haftung mit dem Asbestzement der Randträger hatte.

Modell E, 5: (autoclaviert)

Stichhöhe 2 cm; Vorverformung 3,0 mm in Schalenmitte.
Traglast = 76,9 kg; Messung mit Meßuhren und Dehnungsmeßstreifen.
Der Zusammenbruch erfolgte schließlich als Plattenbruch des Schalen-

segmentes infolge totaler Verflachung. Die Meßergebnisse sind in den Bildern 27 bis 30 wiedergegeben.

Modell E,6:

Stichhöhe 3 cm; das Modell konnte aus den gleichen Gründen wie das Modell E, 4 nicht geprüft werden.

Serie F:

Die Modelle der Serie F wurden versuchsweise mit einem Lack versehen, um die Schwindverformungen auszuschließen. Allerdings hat dies nicht den gewünschten Effekt erzielt.

3.35 Zusammenfassung der Versuchsergebnisse

Wie aus den Bruchursachen der Versuchsmodelle zu ersehen ist, konnten während des ganzen Programmes gewisse Herstellungsschwierigkeiten nicht ausgeschaltet werden. Die größte Schwierigkeit bestand darin, daß der Verbund zwischen den beiden Asbestzementstreifen der Randträger sowie auch zwischen Bewehrung und Asbestzement z.T. unzureichend war. Dies konnte auch die Endverankerung der Gewindestangen nicht verhindern. Weiterhin zeigte sich deutlich, daß Modellschalen mit 3 cm Stichhöhe zur Untersuchung des gestellten Problems nicht brauchbar sind, da die infolge der Längskrümmung auftretende vertikale Resultierende aus der Zugkraft und der Längsbewehrung so groß wird, daß ein Aufspalten des Randträgers nicht zu vermeiden ist. Auch bei Modellschalen mit 2 cm Stichhöhe bedeutete dieser Effekt eine kaum zu bewältigende Schwierigkeit.

Die Versuchsergebnisse sind in den nachfolgenden Diagrammen graphisch dargestellt.

3.36 Nachweis der Traglast von Modellschalen gemäß 2.323

Entsprechend Punkt 2.323 wurden die untersuchten Modellschalen elektronisch berechnet. Um die Wirkung der Streuung der geometrischen Abmessungen bzw. des E-Moduls ausschalten zu können, wurde die rechnerische Traglast als Durchschnittswert vieler, durch Variation der veränderlichen Daten berechneter Ergebnisse gebildet. Die Rechnergebnisse sind in die Versuchsdiagramme der Schale E,5 (siehe die Bilder 27 bis 30) eingetragen. Der Vergleich zwischen den berechneten und gemessenen Ergebnissen zeigt ausreichende Übereinstimmung.

4. Zusammenfassung

Tragwerke mit flächenartigem Querschnitt, besonders wenn sie sehr flach konstruiert sind, erleiden, bis sie den Bruchzustand erreichen, wesentliche Deformationen. Ebenfalls große Deformationen können infolge mangelhafter Ausführung oder zeitabhängiger, langsamer Deformationseinflüsse auftreten. Da das statische Verhalten dieser Konstruktion im Gebrauchszustand unter der Annahme unendlich kleiner Verformungen beschrieben wird, kann über den Bruchzustand bzw. über den Gebrauchszustand unter Langzeiteinwirkungen auf Grund dieser Kenntnisse noch keine Aussage gemacht werden. Sind dabei solche Tragelemente stabilitätsgefährdet, kommt der Berücksichtigung der auftretenden, in der Tat endlich großen Deformationen besondere Bedeutung zu. Hierbei muß außerdem beachtet werden, daß im Falle, wenn das Tragwerk aus dem Werkstoff Stahlbeton ausgeführt wird, die auf Grund von großen Deformationen auftretende Rißbildung eine bedeutende Abweichung vom elastischen Verhalten ergeben kann.

In der vorliegenden Arbeit wurde auf Grund vorhandener theoretischer Kenntnisse bzw. an den durchgeführten Kleinmodellversuchen gewonnenen Erfahrungen eine iterative Lösungsmethode entwickelt, um den Deformationszustand des untersuchten Tragwerks zu beschreiben. Dabei wurden die physikalischen Ursachen von großen Deformationen nicht eingehend untersucht. Es wurde stets vorausgesetzt, daß der die Deformationen hervorrufende physikalische Einfluß in seinem Auswirkungsmaß auf Grund anderer Untersuchungen schon vorliegt. Entsprechend dieser Auffassung wurden z.B. infolge mangelhafter Ausführung entstandene ungewollte Vorkrümmungen der zeitabhängigen Kriechdeformationen bzw. einer evtl. Überbelastung der Konstruktion gleichgesetzt, da alle drei Einflüsse zum gleichen Ergebnis, nämlich zu einem erhöhten Krümmungsmaß und demzufolge einer Abminderung der vorhandenen Sicherheit führen.

Das in 2.3 entwickelte Rechenverfahren wurde mit den Versuchsergebnissen in befriedigendem Maße bestätigt. Es scheint auf Grund dieser Erkenntnisse zweckmäßig, die in diesen Abhandlungen noch nicht in jeder Hinsicht ausreichend bestätigten Annahmen an wirklichkeitsnahen Modellabmessungen und mit dem Stahlbetonmaterial nachzuweisen. Über diese Untersuchungen liegen ebenfalls abgeschlossene Versuchsergebnisse mit befriedigenden Ergebnissen vor.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

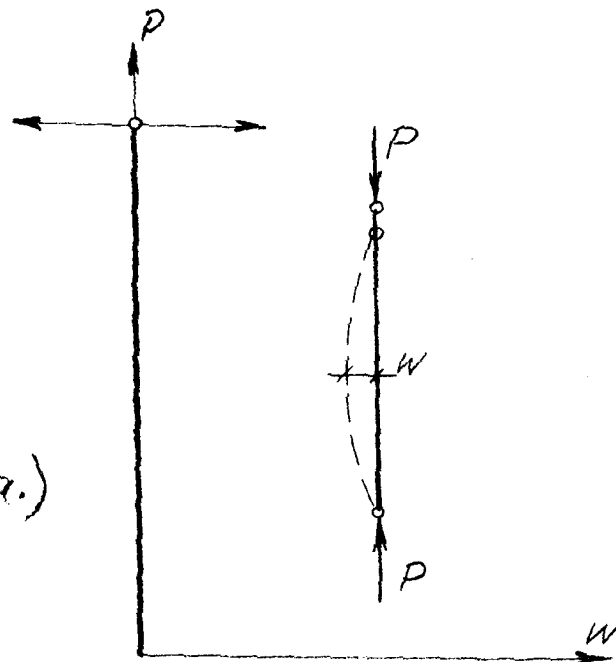
- 1 Aass, A.: Matrix Progression Method (Eine Matrizenmethode zur Lösung komplizierter Aufgaben der Elastostatik). Der Bauingenieur, 1964/9:306 - 311; 10 : 417-421.
- 2 Aass-Jakobsen: Die Berechnung der Zylinderschalen. Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- 3 Beles, A.A.-Soare,M: Large Deflections of the Saddle Hypar due to Temperatur Variations. Non-classical Shell Problems, IASS Symposium, Warsaw, 1963, 307-329.
- 4 Beranek, W.J.-Bouma, A.L.-Van Riel, A.C.-Van Koten, H.: Investigations on Modell of eleven Cylindrical Shells made of Reinforced and Prestressed Concrete. Proceeding of the Symposium on Shell Research, Delft, 1961. S.79-101.
- 5 Berger, E.R.: Eine Näherungsgleichung für die Beullast einer konzentrisch gedrückten Zylinderschale. Beton- u. Stahlbetonbau, 1953/12: 288 - 289.
- 6 Bittner, I.: Mehrpunktverfahren zur Auflösung von Gleichungssystemen ZAMM, 1963, S. 111.
- 7 Brazier, L.G.: On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and other "Thin" Sections. Proc. Royal Society, London, Ser. A.Vol. 116 (1927), 104 - 114.
- 8 Bychawski, Z.: Some Problems of Creep Bending and Creep Buckling of viscoelastic Sheet Panels in the Range of Large Deflections. Non-classical Shell Problems, IASS Symposium, Warsaw 1963, S. 368 - 383.
- 9 Chronowitz, A. Born, J.: Die Berechnung von Zylinderschalen. Konrad Wittwer-Verlag, Stuttgart, 1961.
- 10 Chwalla, E.: Reine Biegung schlanker, dünnwandiger Rohre mit gerader Achse. ZAMM, 1933, 48 - 53.
- 11 Ebel, H.: Das Beulen eines Kreiszylinders nach der nichtlinearen Stabilitätstheorie. Der Stahlbau, 1958, S. 45.
- 12 Eggert, H.: Ein Beitrag zum Problem der Mindeststeifigkeit bei Schalen. Doktor-Dissertation, Darmstadt, 1965.
- 13 Fialkow, M.N.: Limit Analysis of simply supported Circular Shell Roofs. Journal of Eng.Mech. Div., July 1958.
- 14 Flüge, W.F.: Statik und Dynamik der Schalen. Springer-Verlag, Berlin, 1962.

- 15 Fuchssteiner, W.: Kreiszyklinderschalen. Berechnung mit Polynomen.
Beton- u. Stahlbetonbau, 1960/5: 106113.
- 16 Funk, P.: Über ein Stabilitätsproblem bei den durch Krümmung steif
gemachten Meßbändern.
Österreichisches Ingenieur-Archiv, 1951, S. 387 - 397.
- 17 Girkmann, K.: Flächentragwerke, Vierte Auflage.
Springer-Verlag, Wien, 1956.
- 18 Haidkukow, G.K.: Limit Equilibrium Design of Shallow Shell Panels. Non-
classical Shell Problems.
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S. 977 - 996.
- 19 Herber, K.H.: Vorschlag von Berechnungsgrundlagen für Beul- und Trag-
lasten von Schalen.
Der Stahlbau, 1966/2 : 61 - 64.
- 20 Hermann, G.,
Bagge, C.F.: Theoretical and Experimental Stability Investigations
of Cylindrical Shells subjected to Thermal Axial
Compression and Mechanical External Pressure.
IASS Symposium, Budapest, 1965.
- 21 Janas, M.: Limit Analysis of nonsymmetric Plastic Shells by a
generalized Yield Linie Method. Non-classical Shell
Problems,
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S. 997 - 1010.
- 22 Karmann, Th.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere
federnder Ausgleichsrohre.
VDI-Zeitschrift, 1911, S. 1889 - 95.
- 23 Karman, Th.
Tsien: The Buckling of cylindrical Shells under Axial Compression.
Journal of the Aeronautical Sciences. 1941, S. 303 - 312.
- 24 Kaufmann, W.: Über die Stabilität dünnwandiger Hohlzylinder und recht-
eckiger Bleche oberhalb der Proportionalitätsgrenze.
Der Stahlbau, 1937/1: 1 - 4.
- 25 Keshava Rao, M.N.
Raman, N.V.: Lower Bounds for Collapse Loads of Cylindrical Shells
with Edge Beams.
The Indian Concret Journal, November, 1963.
- 26 Kirchner, G.: Zur Berechnung langer Zylinderschalen.
Der Bauingenieur, 1958/7: 256 - 265.
- 27 Klöppel, K.
Lie, K.H.: Beitrag zur Beulung von Schalen mit Hilfe der Energie-
methode.
Deutscher Ausschuß für Stahlbau 1908-1958, S. 65.
- 28 Kollar, L.: Stability of Centrally-Compressed Shell-Arches.
Acta Technica Acad. Sci. Hung. Budapest. Tom. XXXII (1961)
Fasc. 1 - 2, 11 - 38.

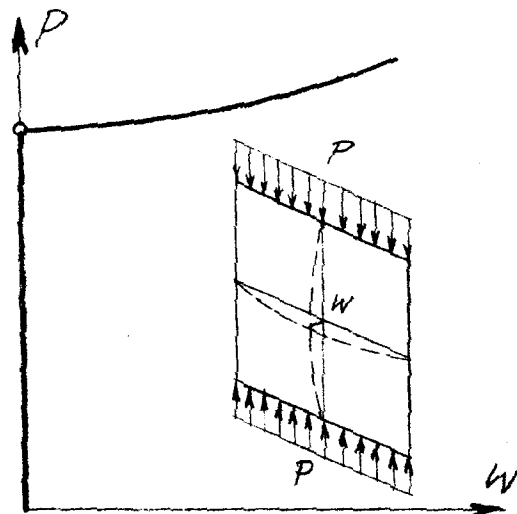
- 29 Kollar, L.: Stability of Bent Shell-Arches.
Acta Technica, Acad. Sci. Hung. Budapest, Tom. XXXII
(1961) Fasc. 3 - 4, 267 - 297.
- 30 Kollbrunner, C.F. Ausbeulen.
Meister, M.: Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- 31 Kordina, K.: The Influence of Creep on the Buckling load shallow
Cylindrical Shells. Non-Classical Shell-Problems,
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S. 602 - 608.
- 32 Lundgren, H.: Cylindrical Shells.
The Danish Technical Press, Kopenhagen, 1960, Volume I.
- 33 Mehmel, A.: Einige Ergebnisse einer modellstatistischen Untersuchung
auf Durchschlagen einer auf 6 Stützen gelagerten Kugel-
segmentkuppel großer Abmessungen.
Proc. of the Symposium on Shell Research, Delft, 1961,
S. 342 - 345.
- 34 Mileykowski, J.E.: Some Problems of Analysis of Reinforced Concret Cylindri-
cal Shell - Roofs taking into Account Crack Formation.
Non-classical Shell Problems,
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S. 1126 - 1139.
- 35 Mungen, J.: Die Beanspruchung von Kreiszyklinderschalen unter Be-
rücksichtigung verschiedener Hauptspannungsverhältnisse.
Materialprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen
Hochschule München, Bericht Nr. 63, 1965.
- 36 Nakamura, T.: Limit Analysis of nonsymmetric sandwich Shells. Non-
classical Shell Problems,
IASS Symposium, Warsaw, 1963, S. 767 - 785.
- 37 Pflüger, A.: Zur Berechnung der axial gedrückten Kreiszyklinderschale.
Der Stahlbau, 1963/6:161.
- 38 Pflüger, A.: Stabilitätsproblem der Elastostatik.
Springer-Verlag, Berlin, 1964.
- 39 Prager, W. Theorie ideal plastischer Körper.
Hodge, P.G.: Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- 40 Rabich, R.: Die Statik der Schalenträger.
Bauplanung - Bautechnik, 1956, 1:4 - 15.
- 41 Rabich, R.: Die Statik der Schalenträger.
Bauplanung - Bautechnik, 1955/3-4.
- 42 Raman, N.V. Upper Bounds for Collaps Loads of Cylindrical Shells.
Keshava Rao, M.N.: The Indian Concret Journal, May, 1964.
- 43 Rüdiger, D. Kreiszyklinderschalen.
Urban, J.: B.G. Teubner-Verlag, Leipzig, 1955.

- 44 Sankaranarayanan, R. The Load Carrying Capacities of Plates and Shells.
Olszak, W.: Non-classical Shell Problems.
IASS Symposium Warsaw, 1963, S. 842 - 866.
- 45 Sawczuk, A.: On Experimental Foundations of Limit Analysis Theory
of Reinforced Concrete Shells.
Proc. of the Symposium on Shells, Delft, 1961, S. 217- 231.
- 46 Sawczuk, A. Grenztragfähigkeitstheorie der Platten.
Jäger, Th.: Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- 47 Schmidt, H.: Ergebnisse von Beulversuchen mit doppelt gekrümmten
Schalenmodellen aus Aluminium.
Proc. of the Symposium on Shell Research, Delft, 1961,
S. 159 - 181.
- 48 Stabilini, L.: Instabilitätsproblem im Stahlbau.
Der Bauingenieur, 1958/6: 213 - 220.
- 49 Timoshenko, S. Theory of elastic Stability.
Gers, J.M.: Mc Graw Hill-Verlag, New York, 1961.
- 50 Wlassow, W.S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der
Technik.
Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
- 51 Wolmir, A.S.: Fliegsame Platten und Schalen.
VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962 .

a.)

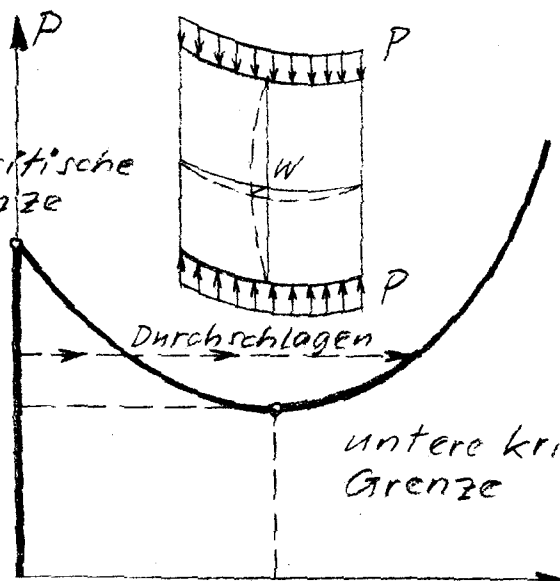


b.)



obere kritische Grenze

c.)



untere kritische Grenze

Charakteristische Diagramme von 1-, 2- und 3-dimensionalen Tragsystemen.

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

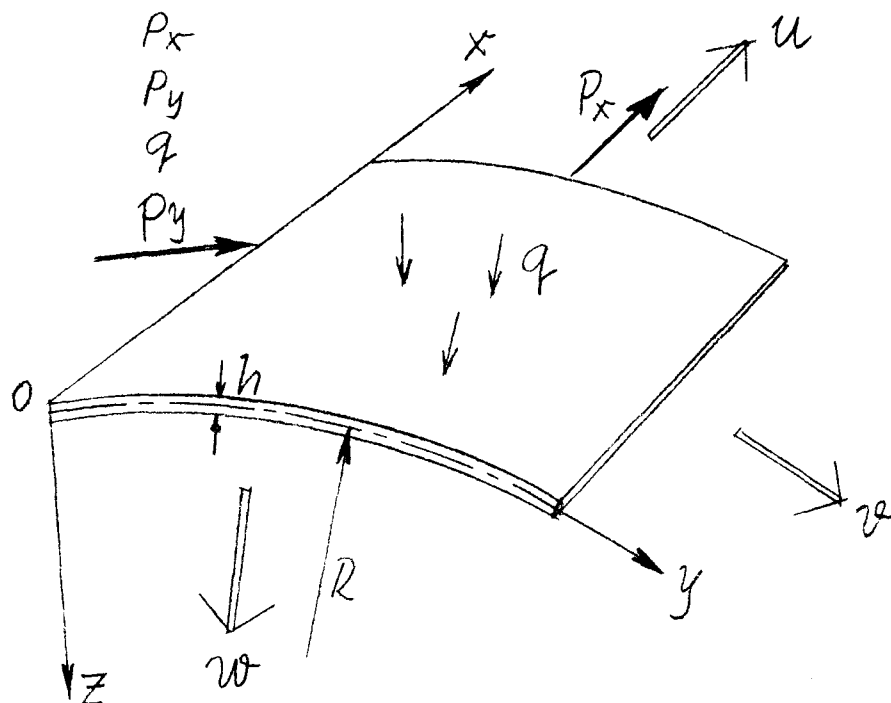
Bild 1

Koordinaten-
 Verschiebungs-
 Lastkomponenten

x
 y
 z

u
 v
 w

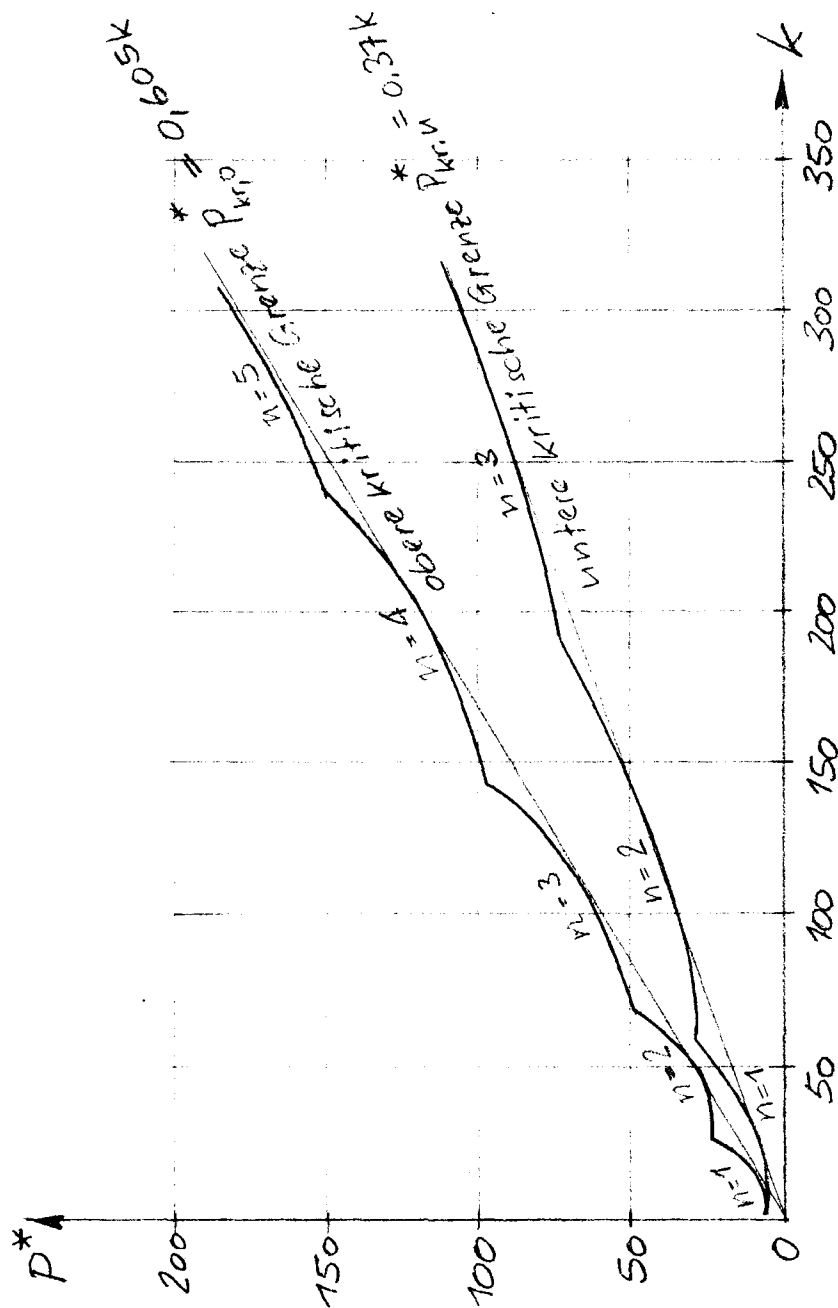
P_x
 P_y
 q



Bezeichnungen zur Theorie der großen
 Deformationen

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
 Technische Hochschule Braunschweig
 Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

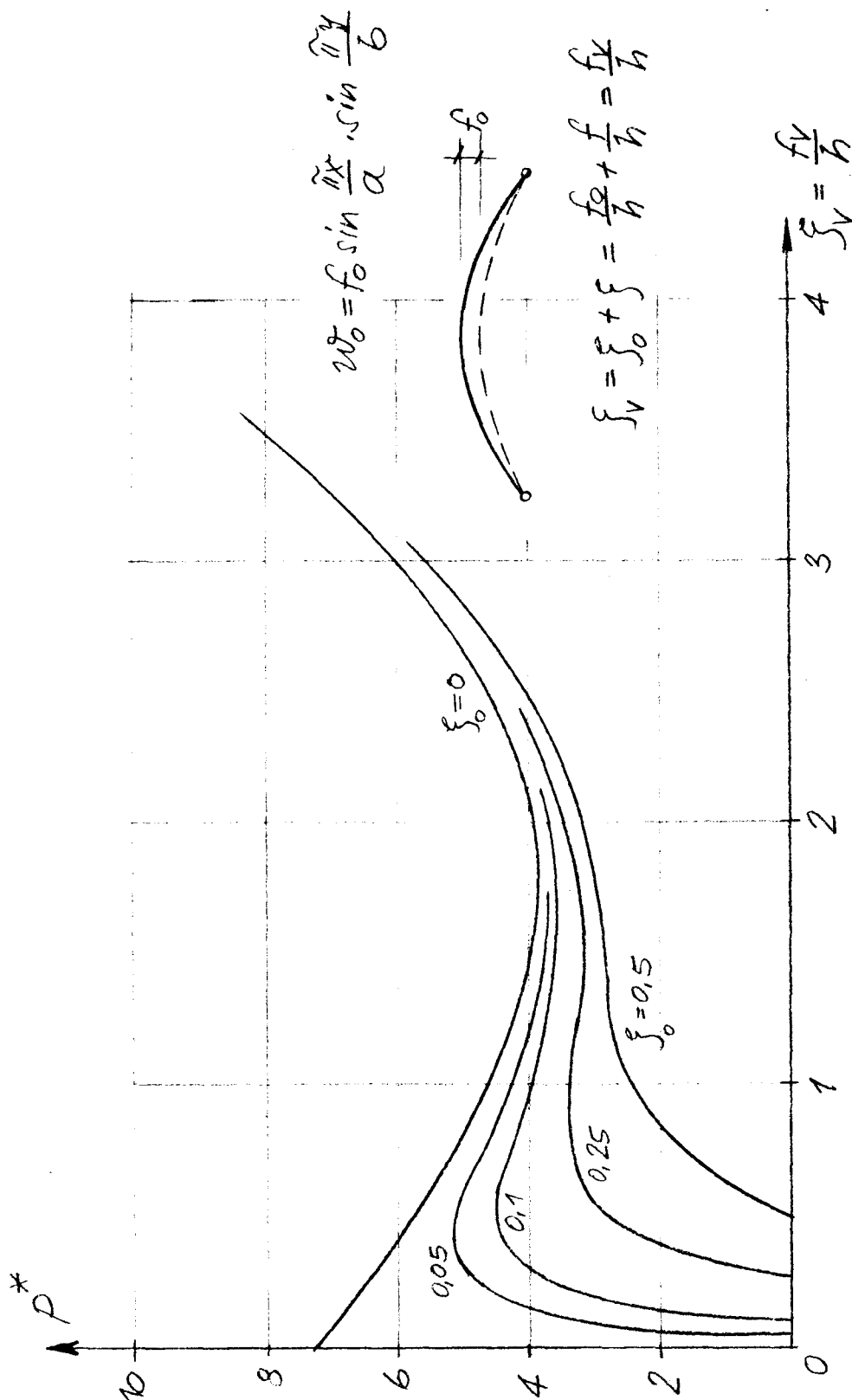
Bild 2



Zylindrisches Schalenfeld unter Axialdruck
(Lösung mit 2-gliedrigem Ansatz)

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

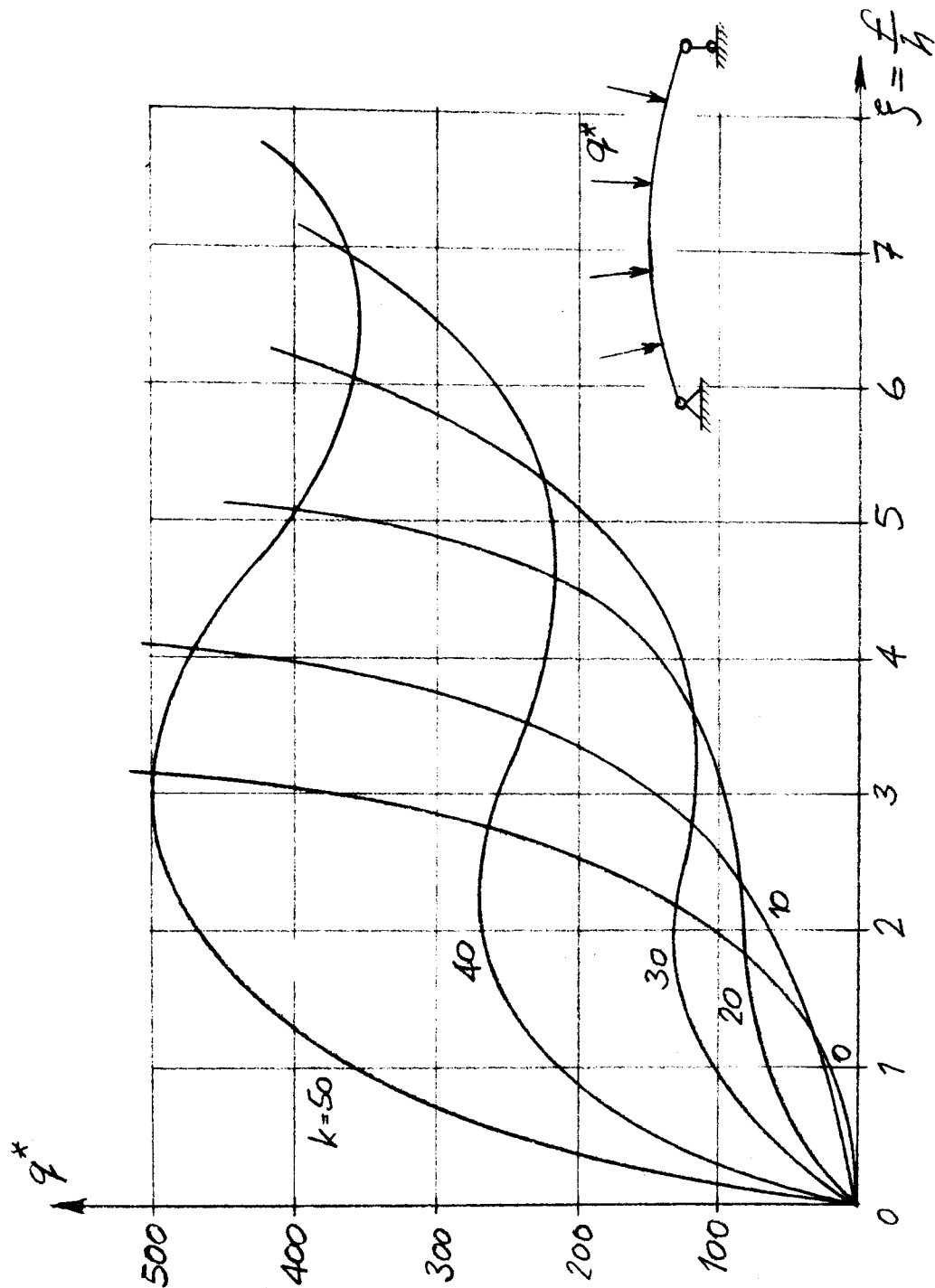
Bild 3



Die Auswirkung einer Anfangs-Deformation
für ein zylindrisches Schalenfeld wenn $k=2$

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

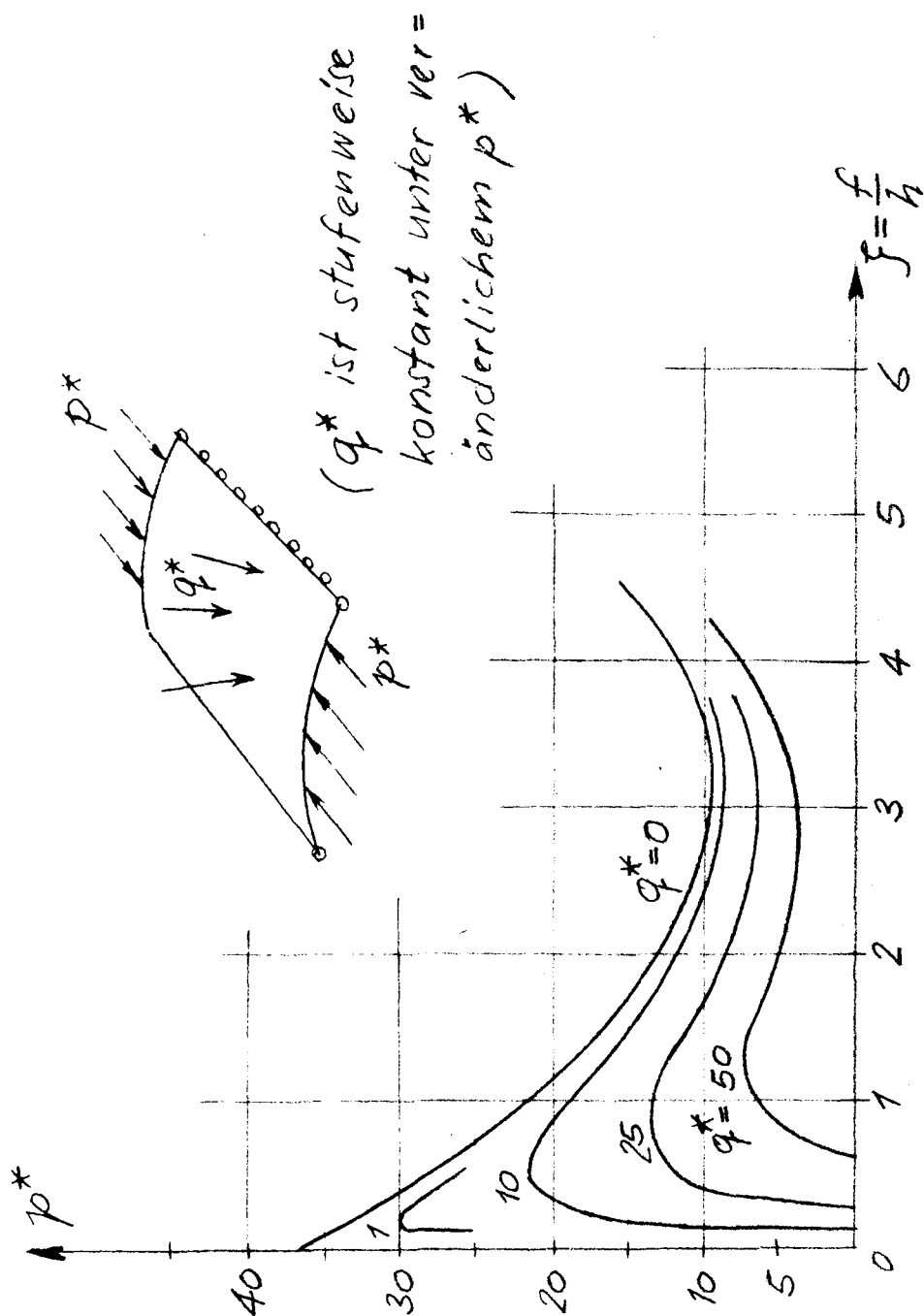
Bild 4



Belastungs-Deformations-Diagramm eines
flachen zylindrischen Schalenfeldes

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 5

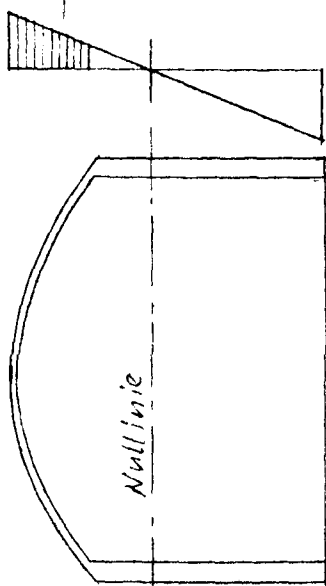


Gleichzeitige Wirkung von Quer- und Längs-
Belastung auf ein zylindrisches Schalenfeld, wenn $k = 24$

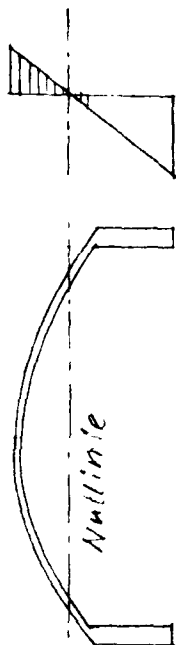
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 6.

Tonnenschale mit hohen Randträgern



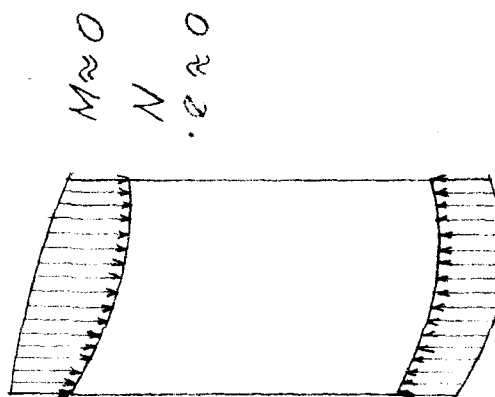
Tonnenschale mit mittelgroßen Randträgern



Tonnenschale ohne Randträger



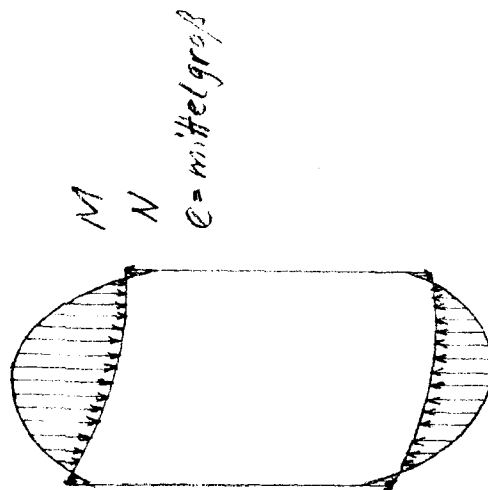
a.)



$M \approx 0$
 $N \approx 0$
 $e \approx 0$

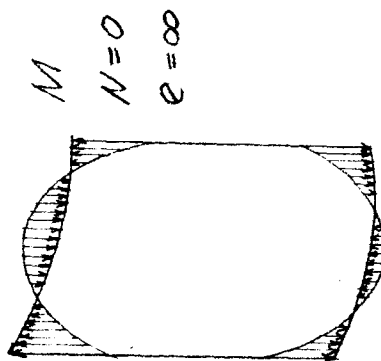
Biegeeffekt

b.)



M
 N
 $e = \text{mittelgroß}$

c.)



M
 $N = 0$
 $e = \infty$

Verflachungseffekt

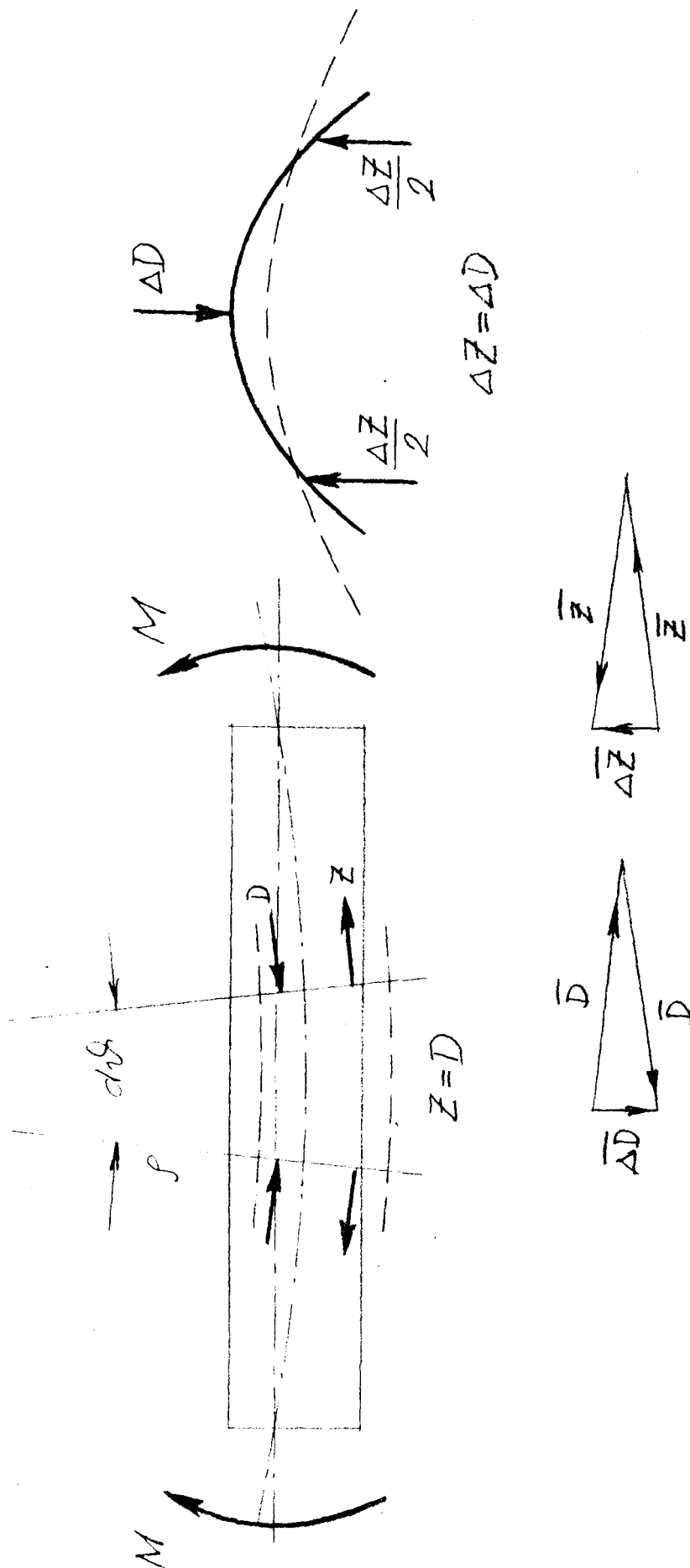
Der Einfluß der Randträgerhöhe auf die Art der Beanspruchung des Schalenfeldes

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig

Amliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

<https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201905281433-0>

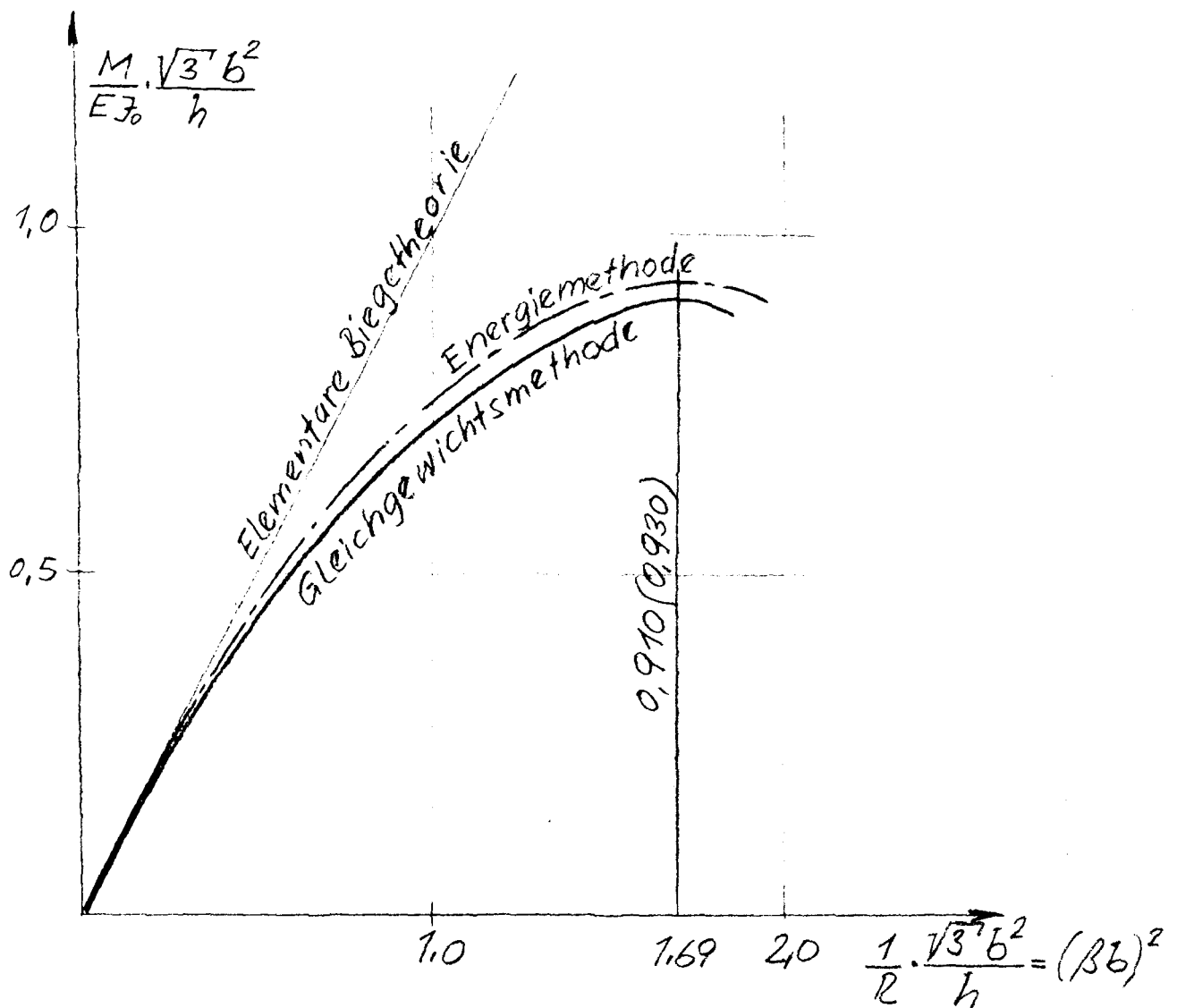
Bild 7



Erklärung des Brazier Effektes

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
 Technische Hochschule Braunschweig
 Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

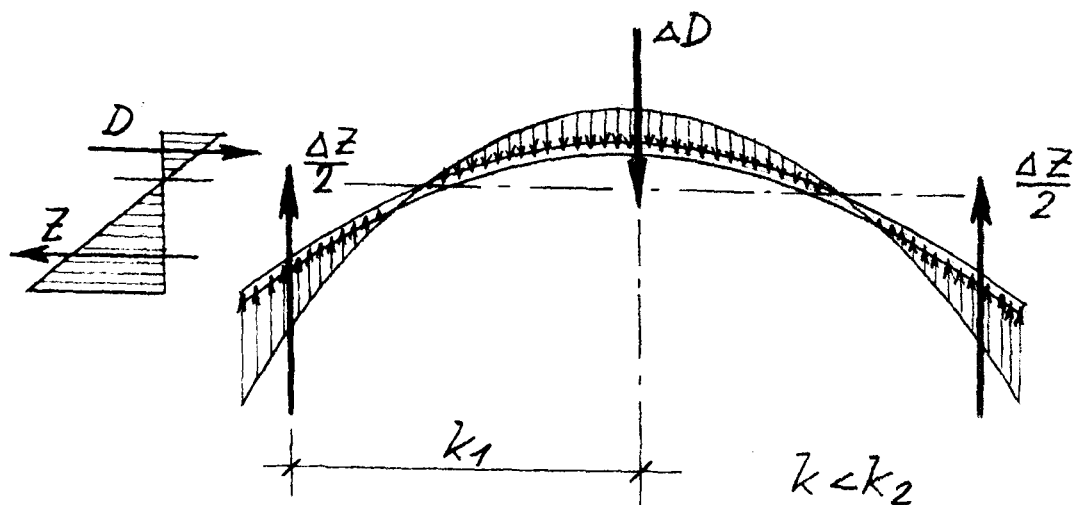
Bild 8



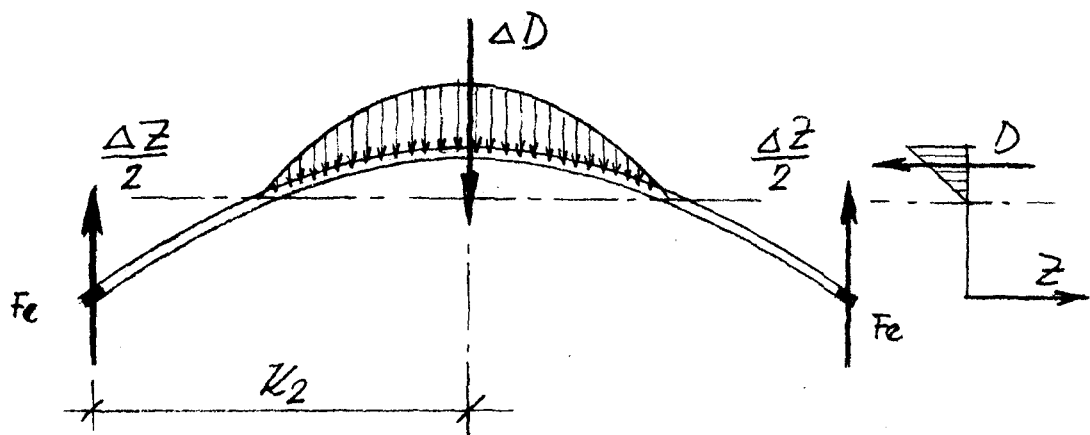
Die Wirkung des Brazier-Effektes auf einen
homogenen Querschnitt

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 9.



a.) Homogener Querschnitt

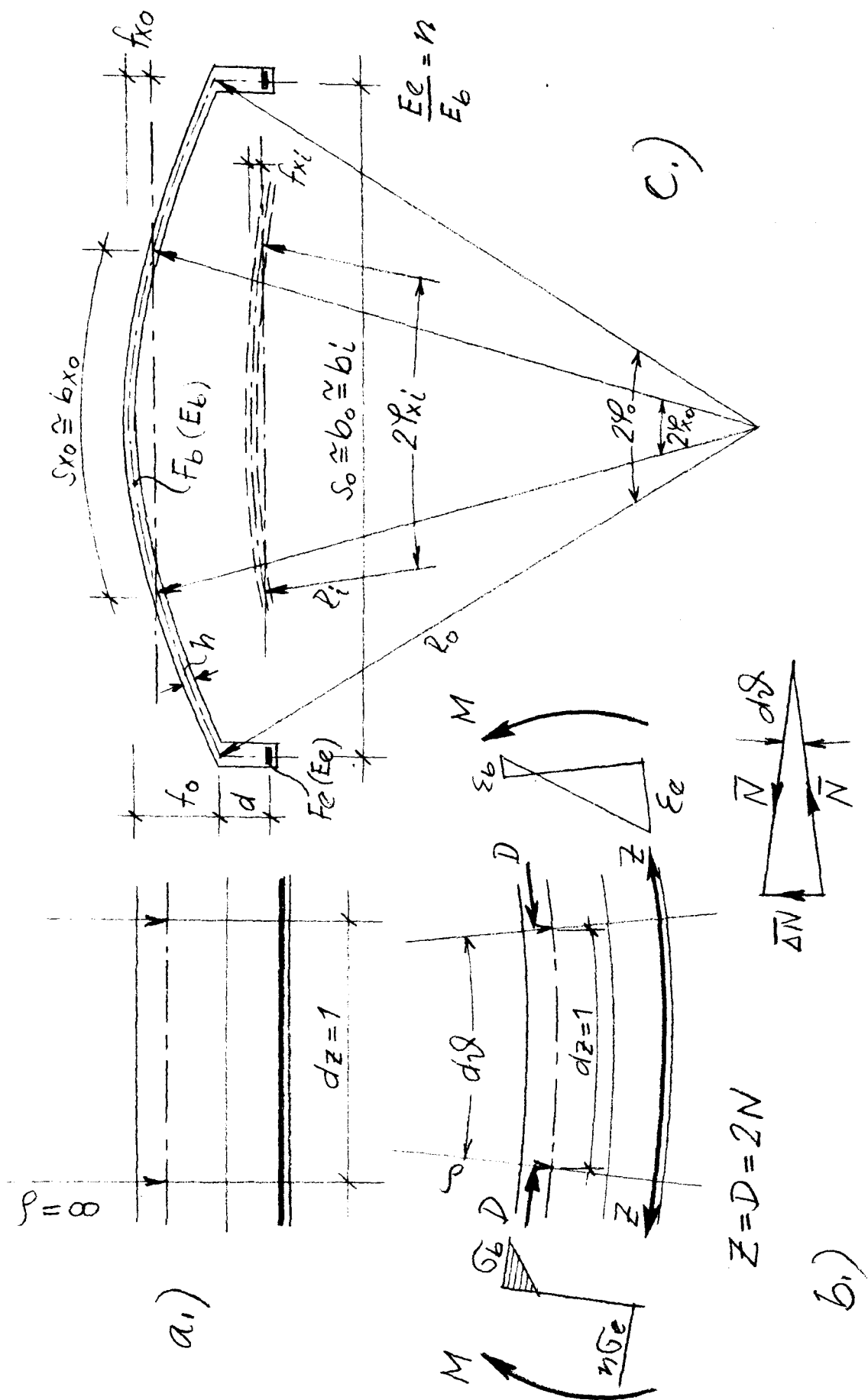


b.) Stahlbeton-Querschnitt

Vergleich zwischen einem homogenen und einem
Stahlbeton-Querschnitt

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

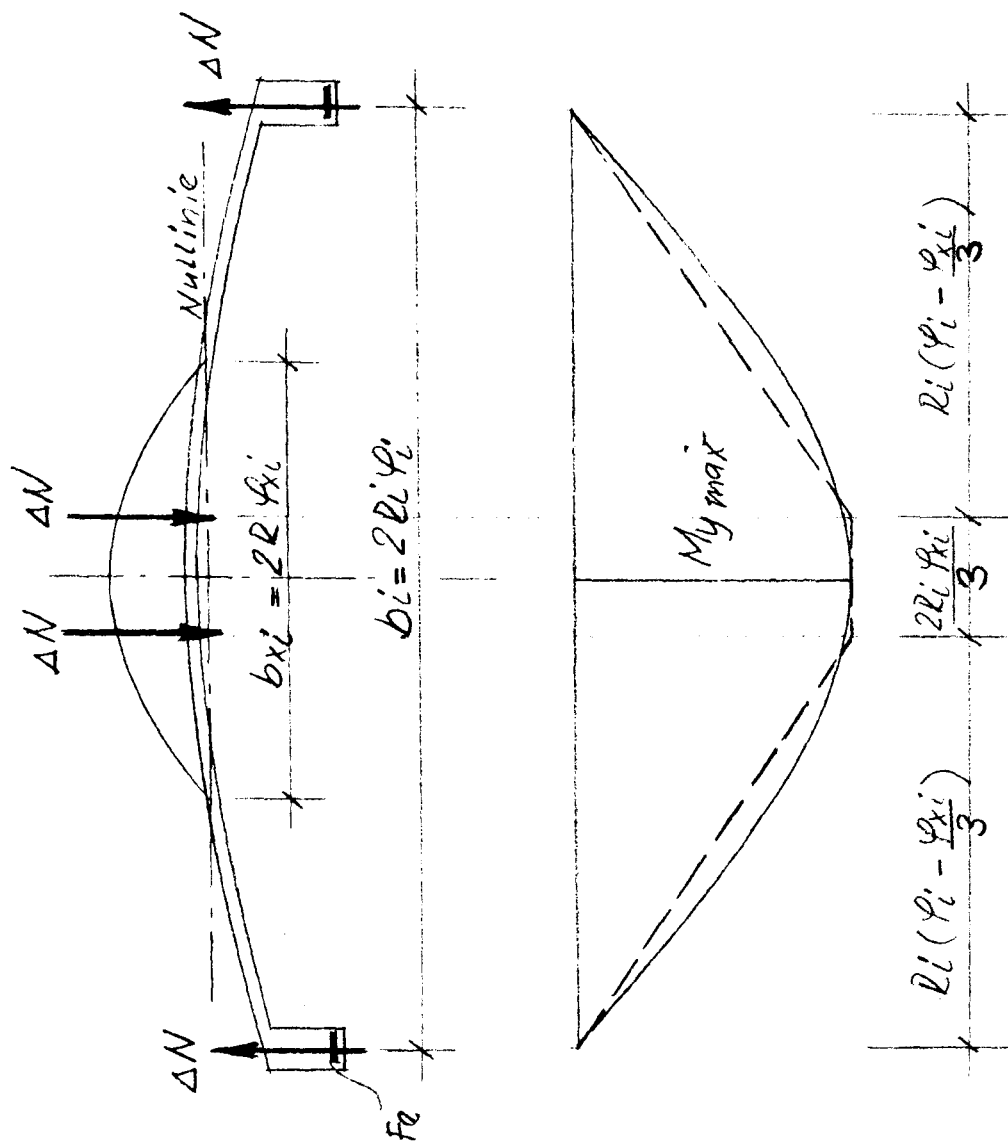
Bild 10



Allgemeine Bezeichnungen

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 11

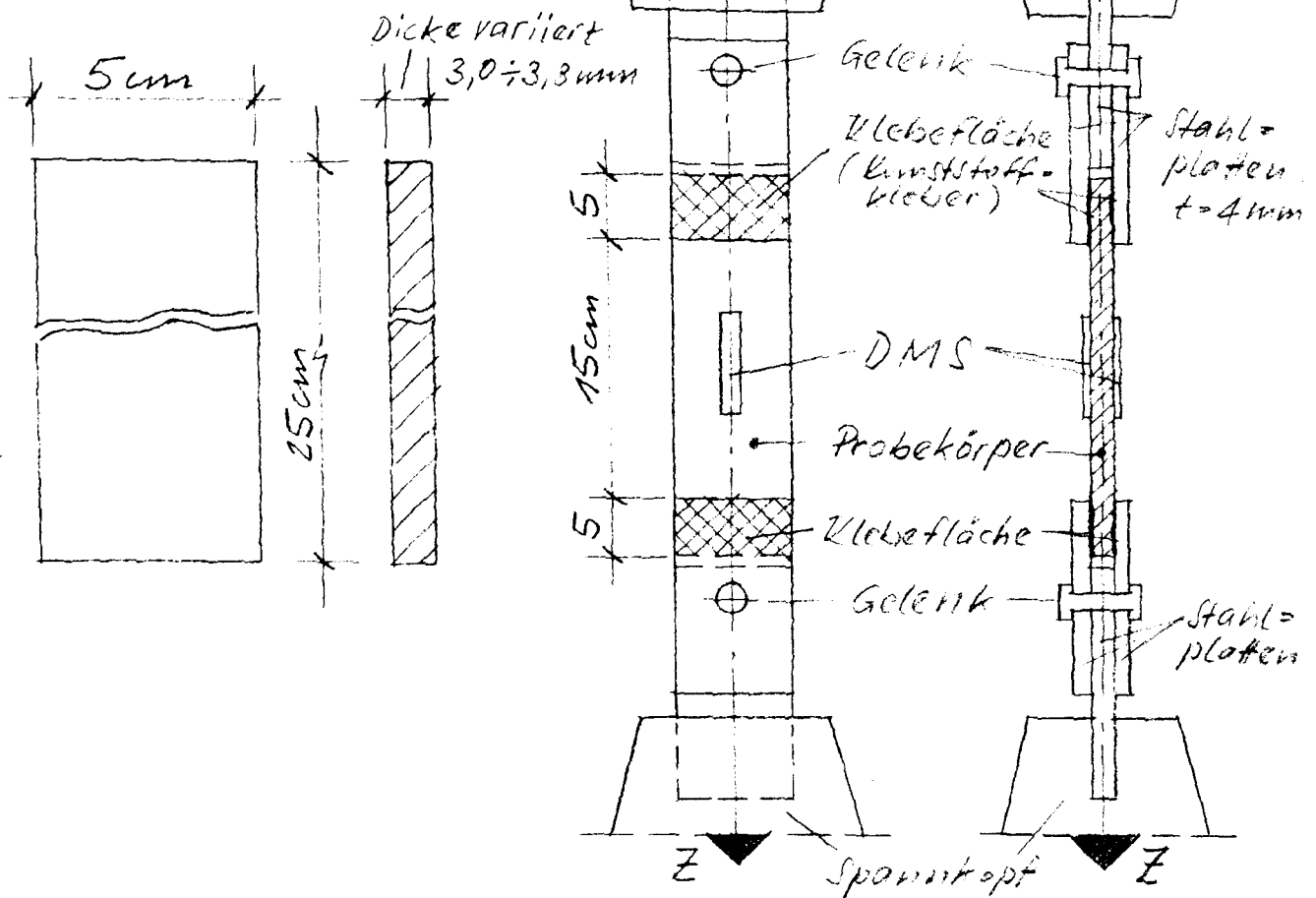


Bestimmung der Querbiegung

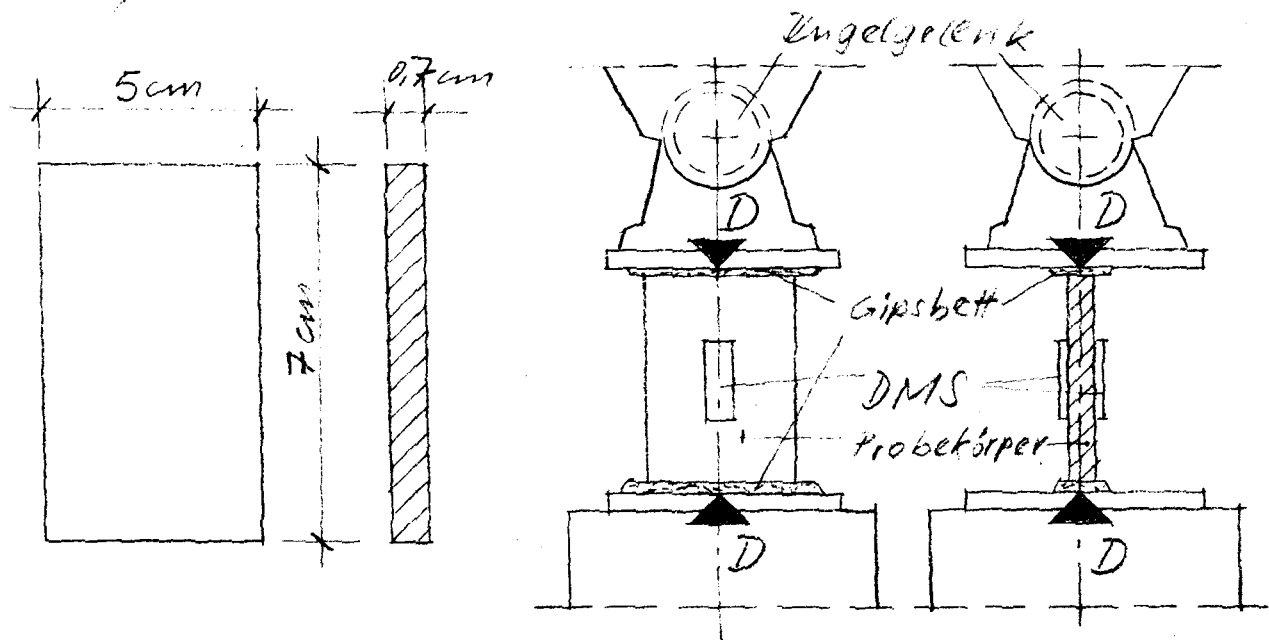
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 12

a.) Zugversuch



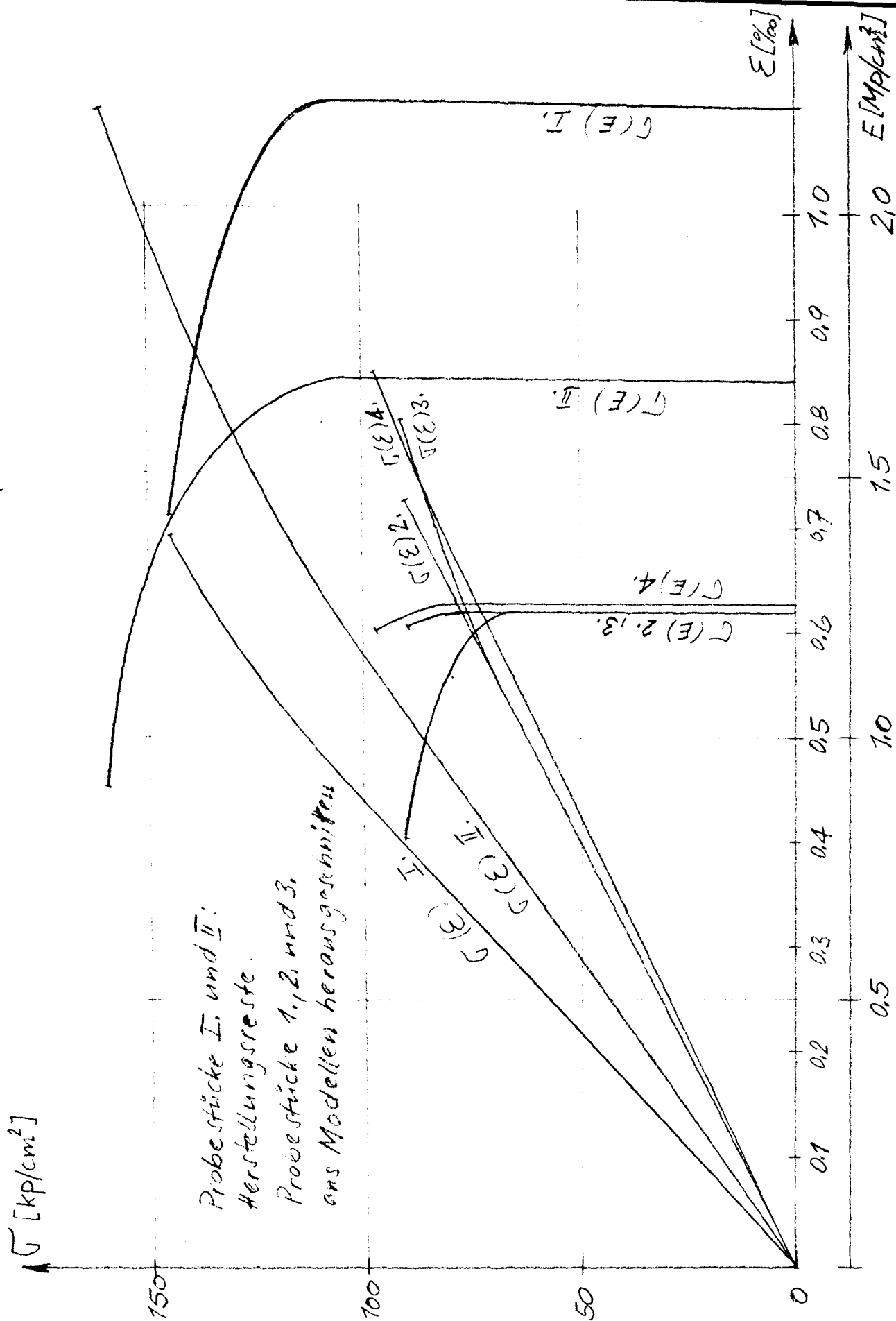
b.) Druckversuch



Probenform und Versuchseinrichtung für
Zug- und Druckversuche an Asbestzementproben

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

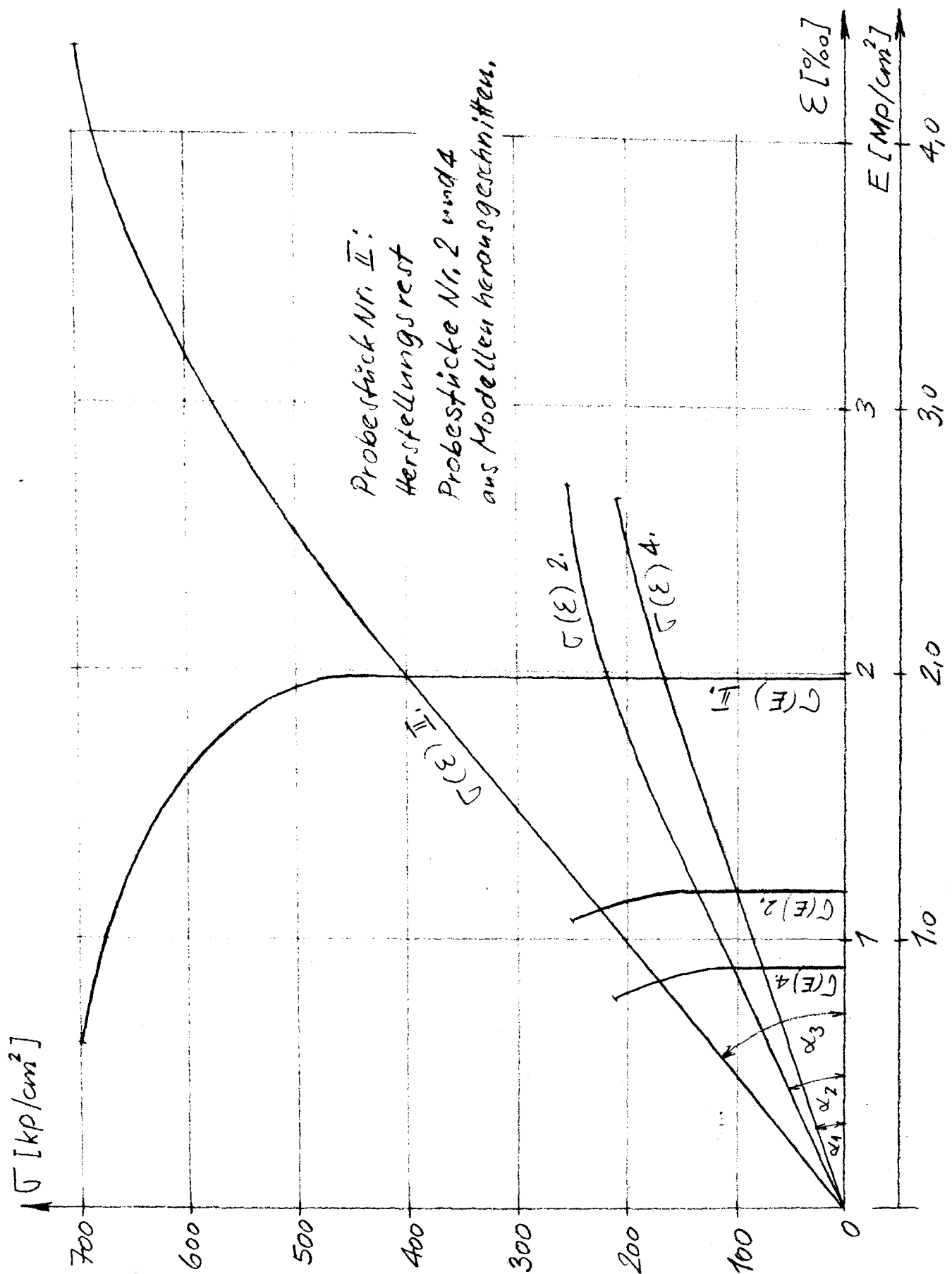
Bild 13



Zugversuche Serie „C“, Nr. 2, 3 und 4

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
 Technische Hochschule Braunschweig
 Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

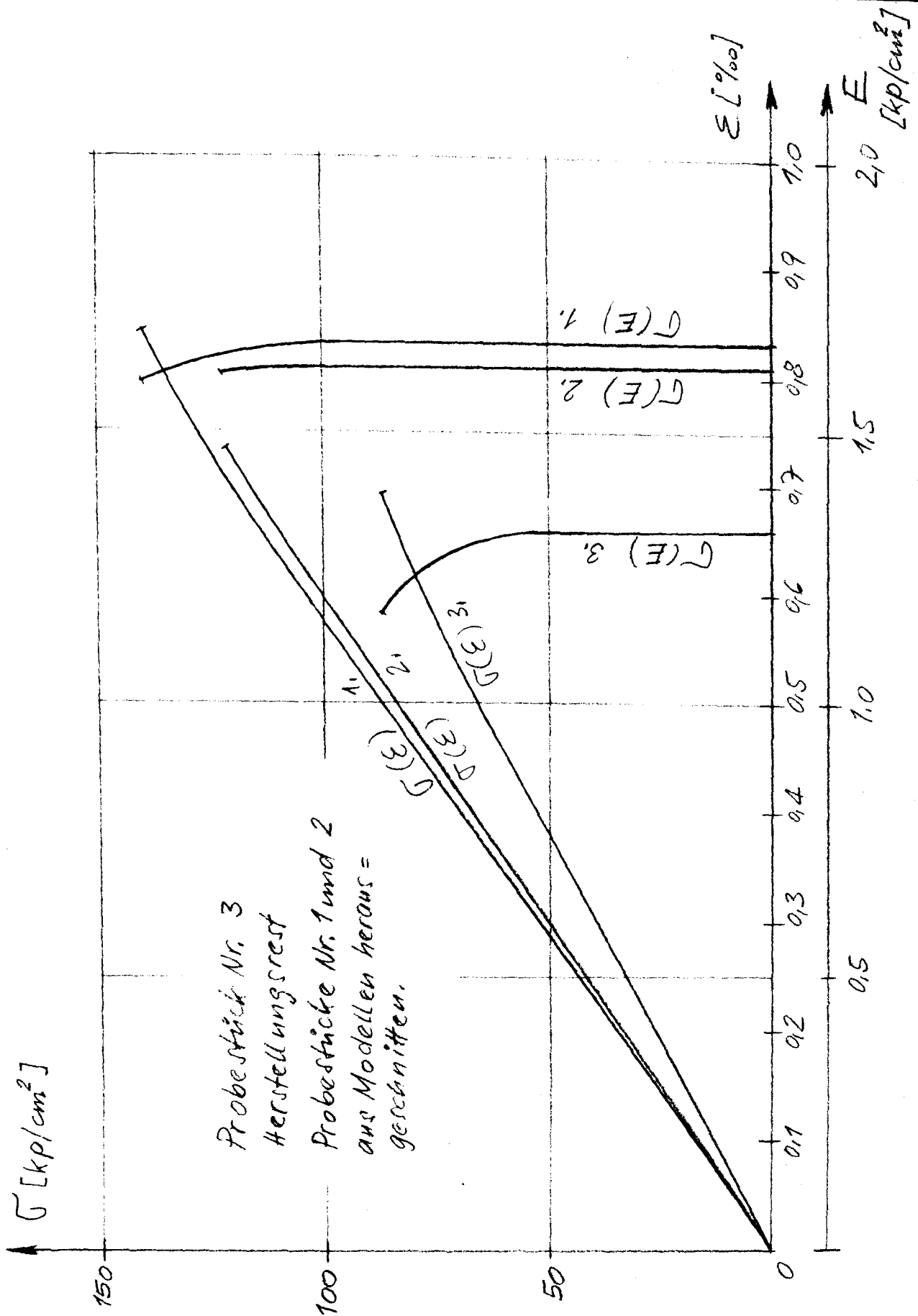
Bild 14



Druckversuche Serie „C“, Nr. 2 und 4

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
 Technische Hochschule Braunschweig
 Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

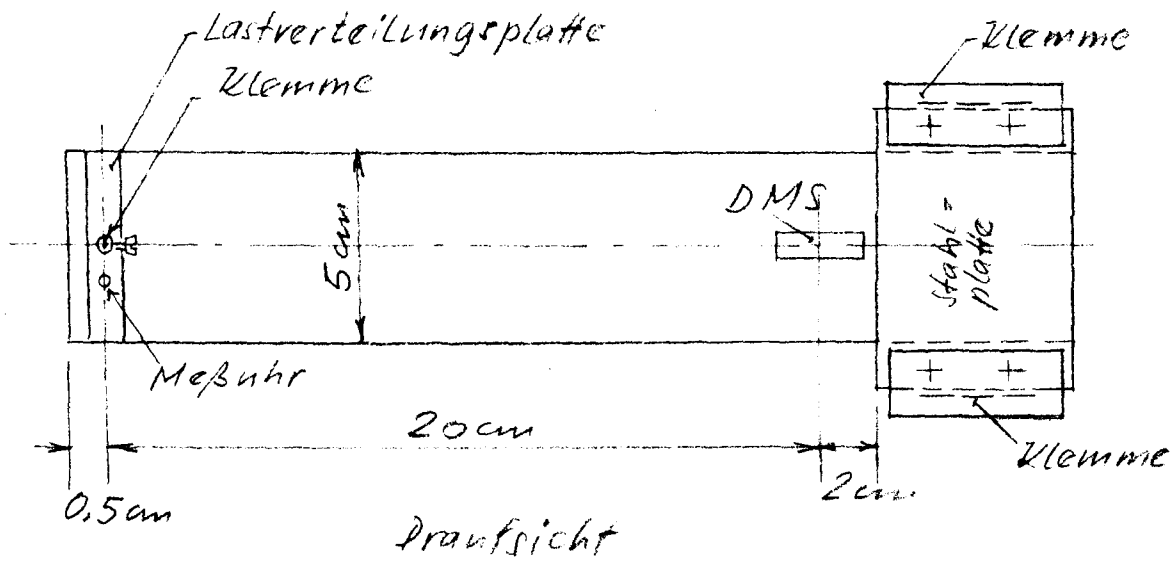
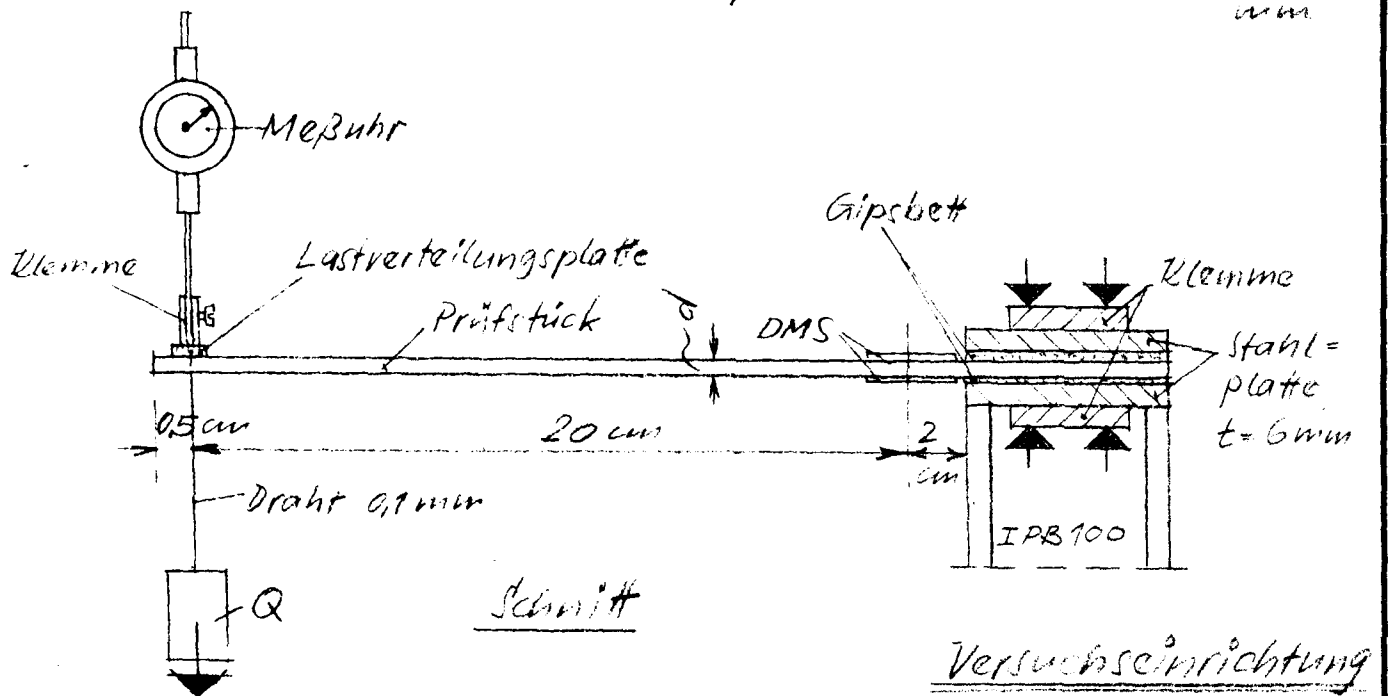
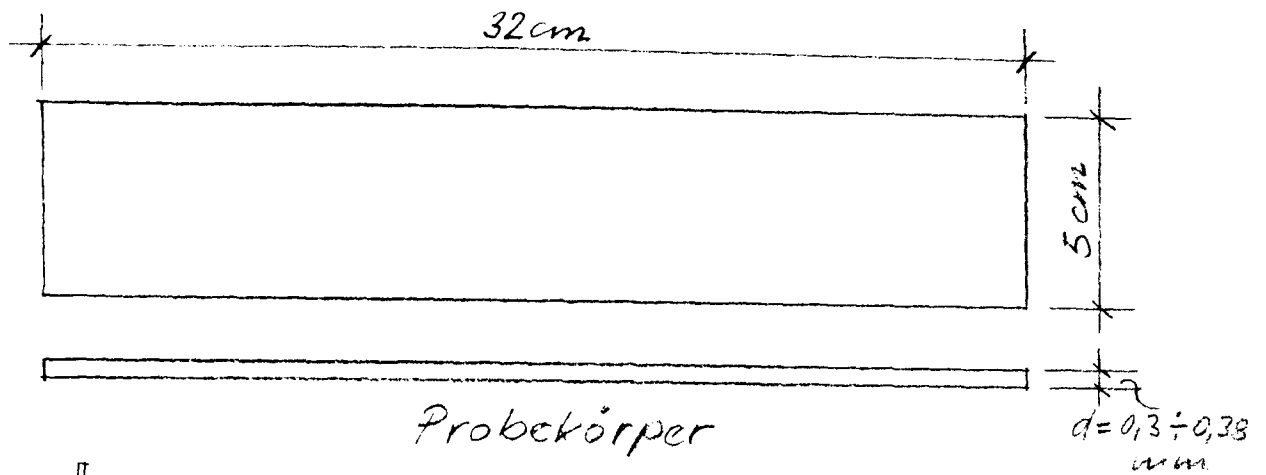
Bild 15



Zugversuche Serie "E", Nr. 5

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
 Technische Hochschule Braunschweig
 Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

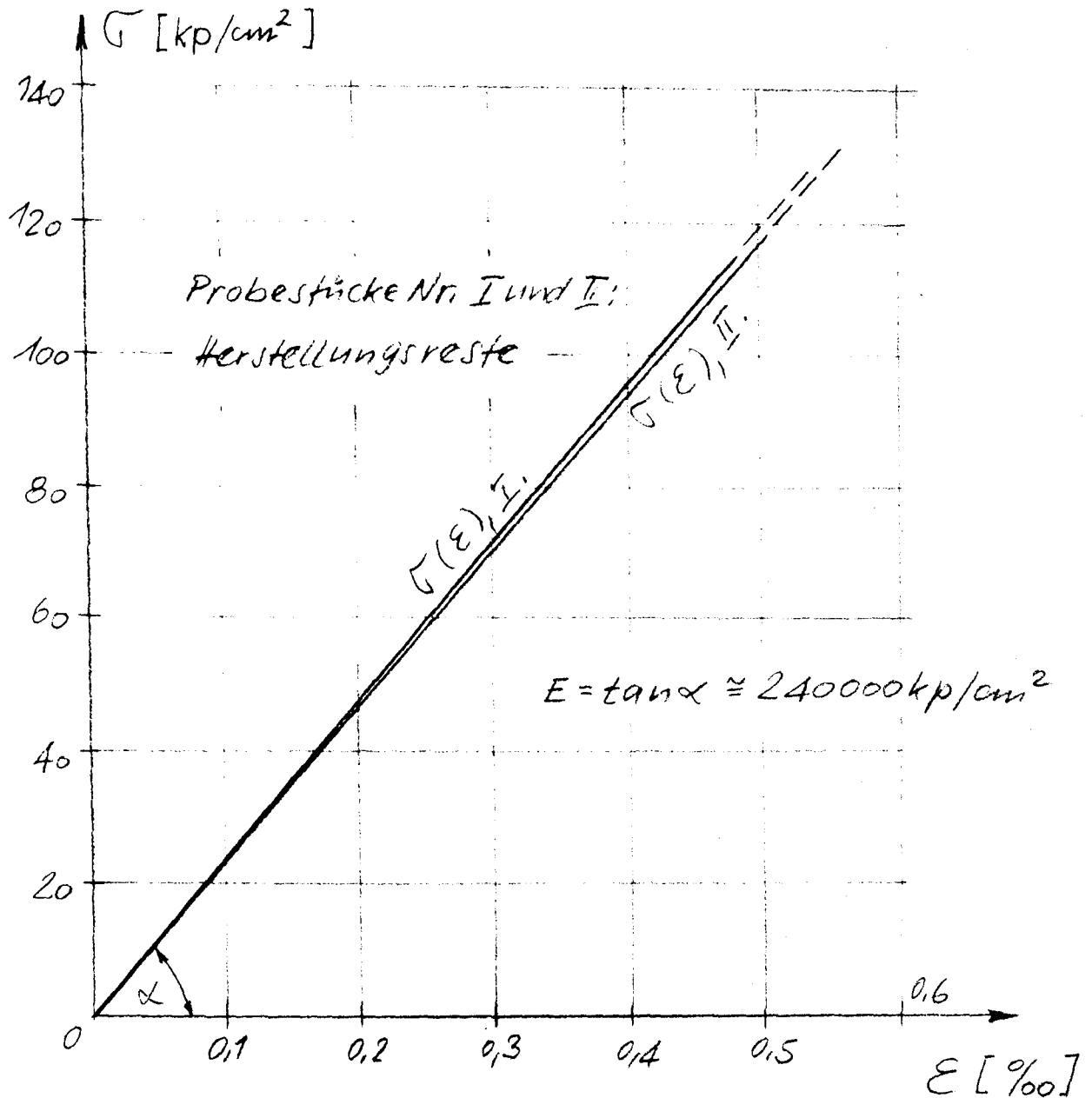
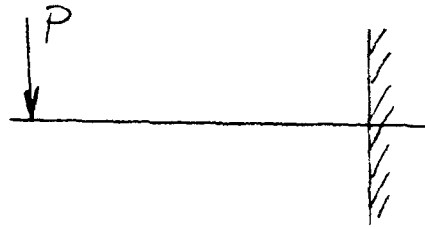
Bild 16



Probengröße und Versuchseinrichtung
für Biegezugversuch (I)

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 17

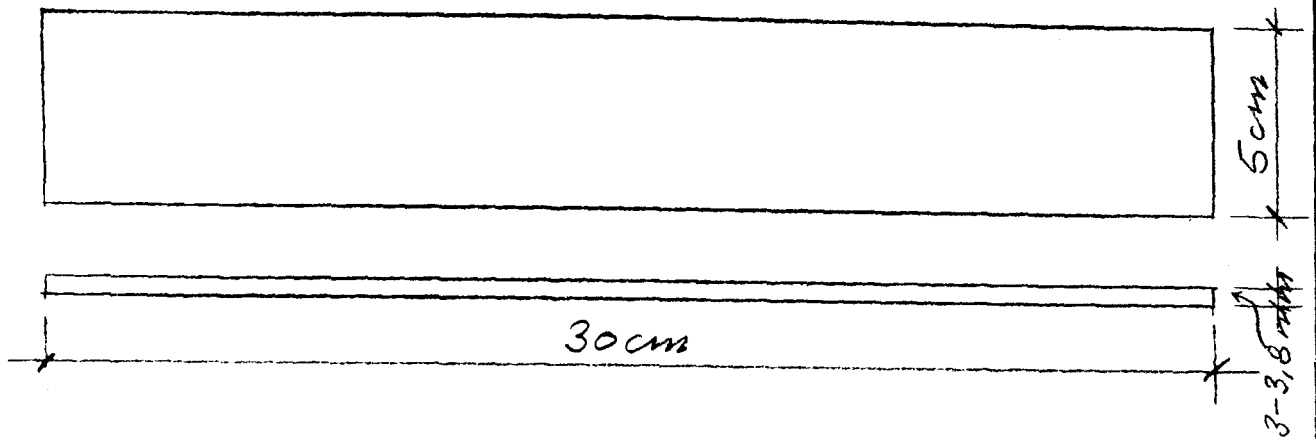


Biegezugversuche Serie "C"

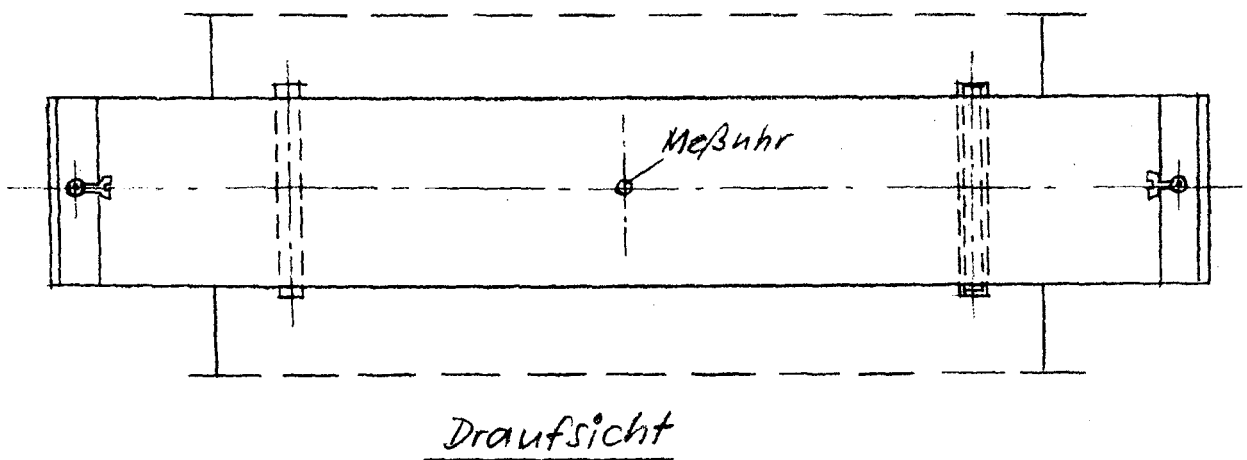
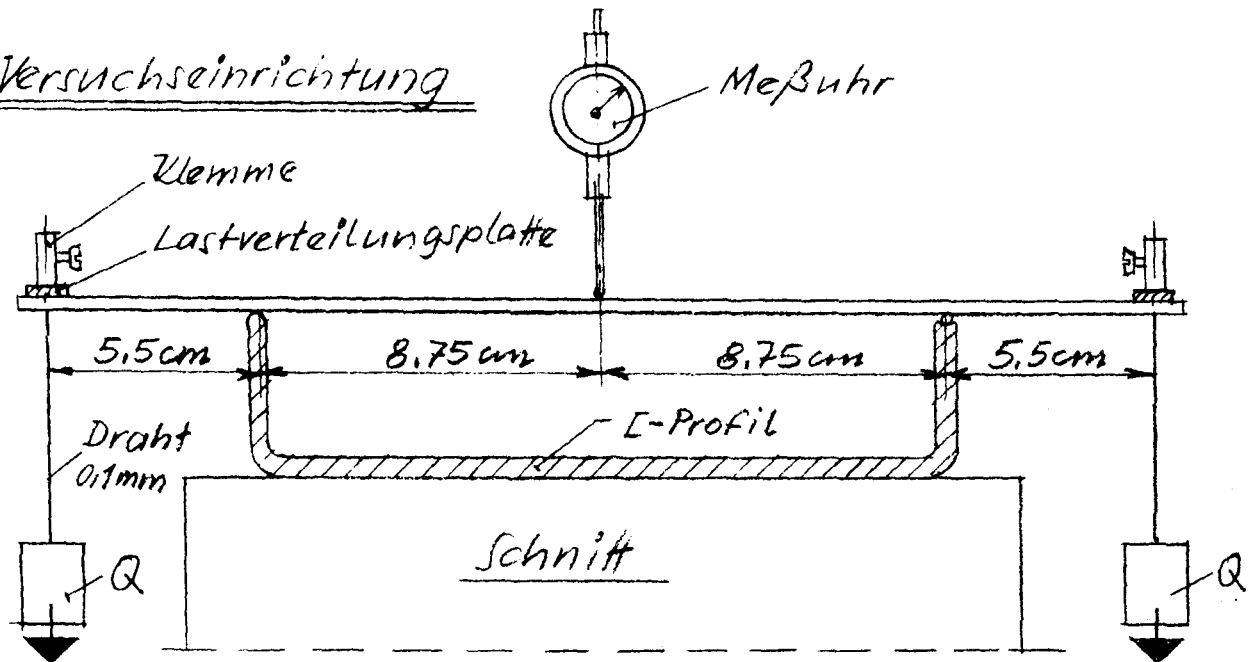
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 18

Probekörper



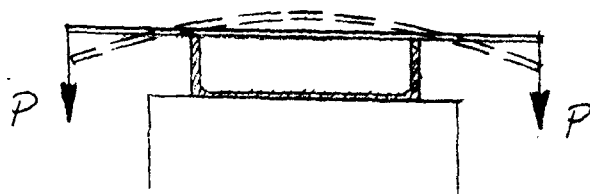
Versuchseinrichtung



Probengröße und Versuchseinrichtung
für Biegezugversuch (II)

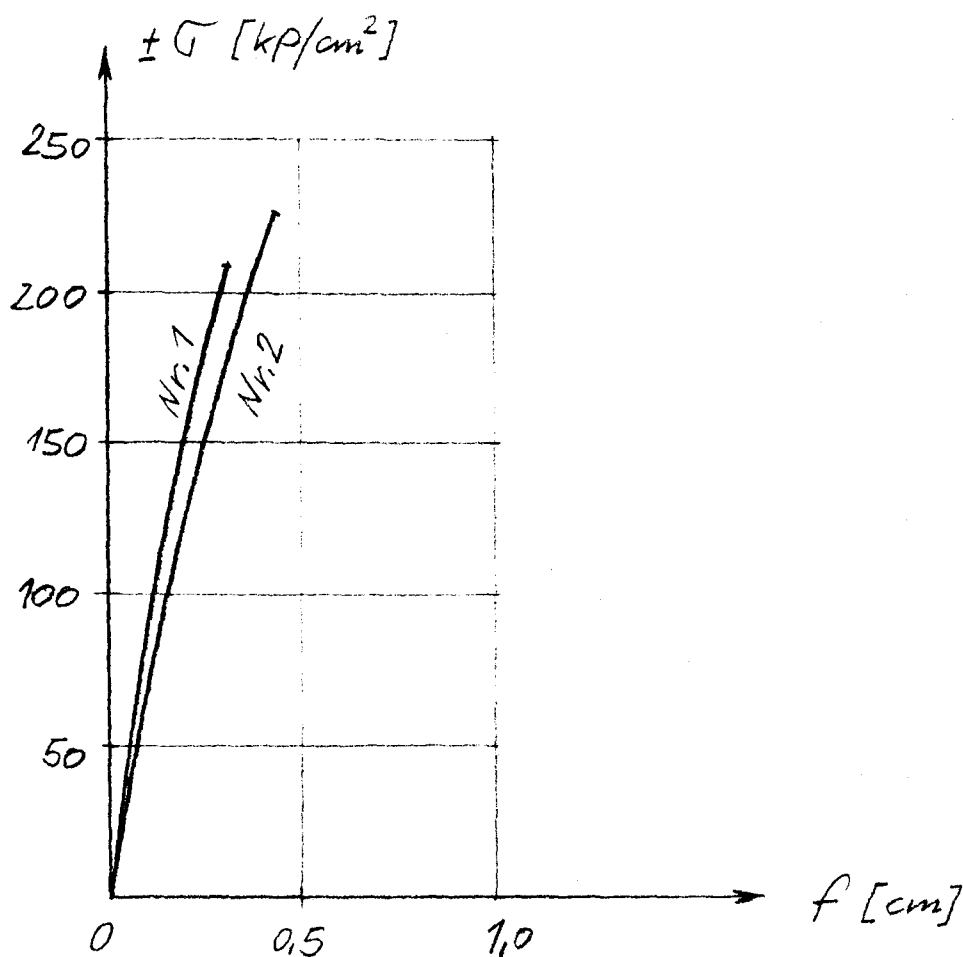
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 19



Nr. 1: $E_{(0-85 \text{ kp/cm}^2)} \cong 140000 \text{ kp/cm}^2$

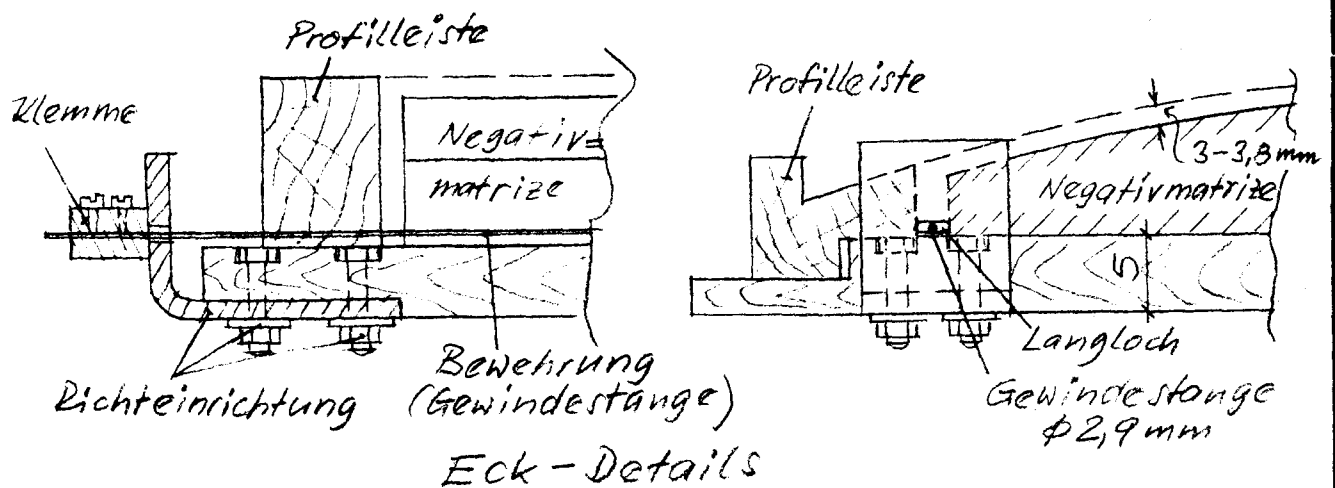
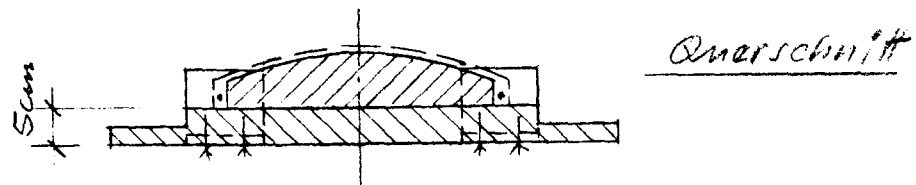
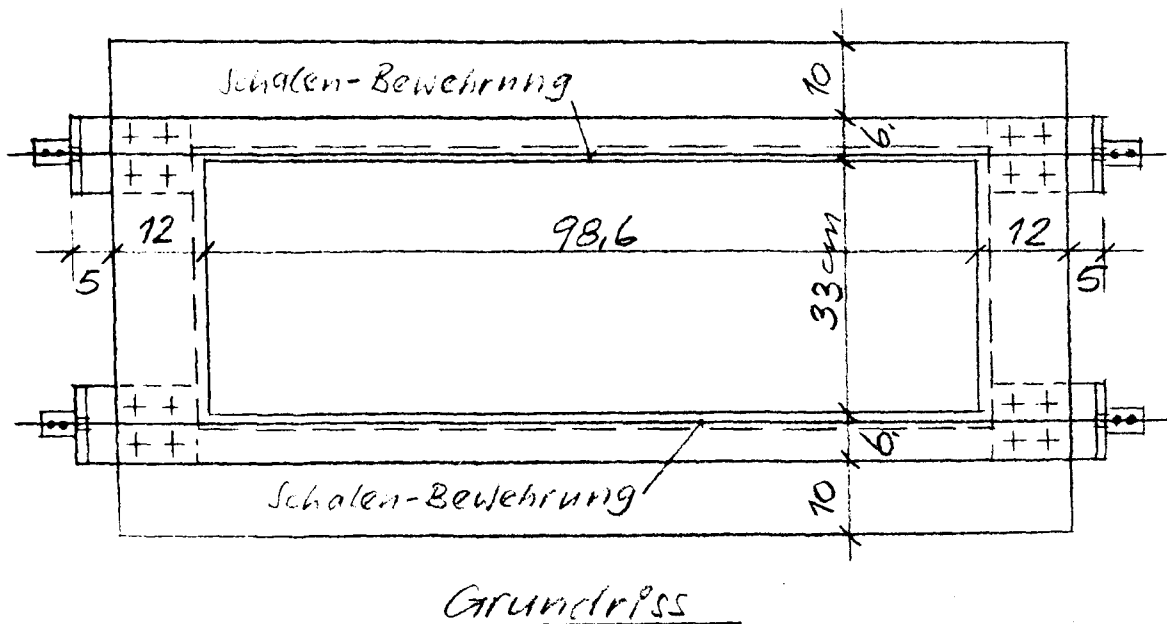
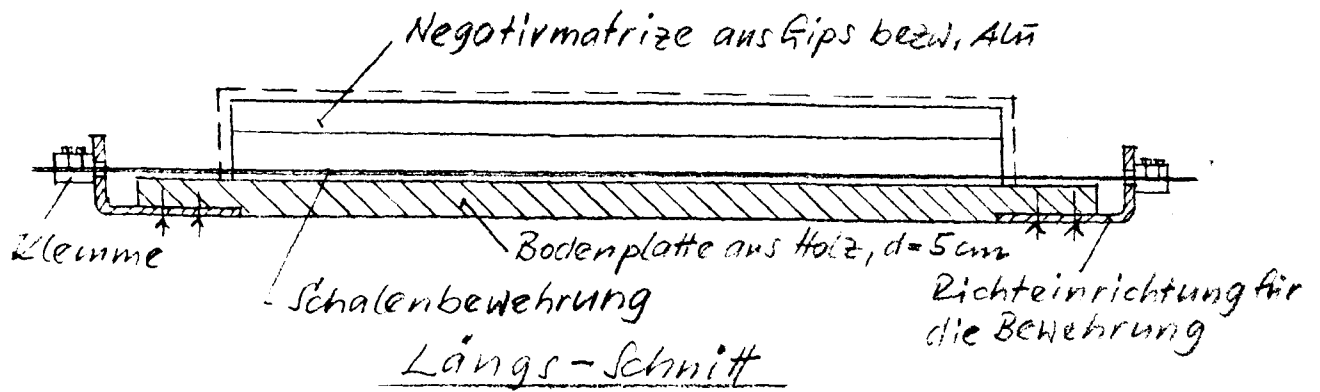
Nr. 2: $E_{(0-61 \text{ kp/cm}^2)} \cong 138000 \text{ kp/cm}^2$



Biegezugversuch Serie „E“, Nr. 5

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

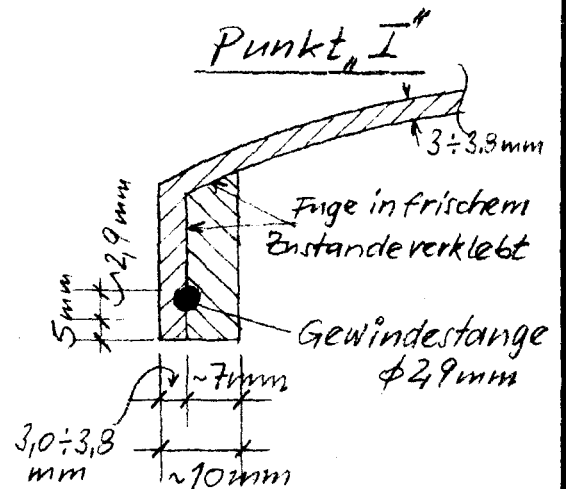
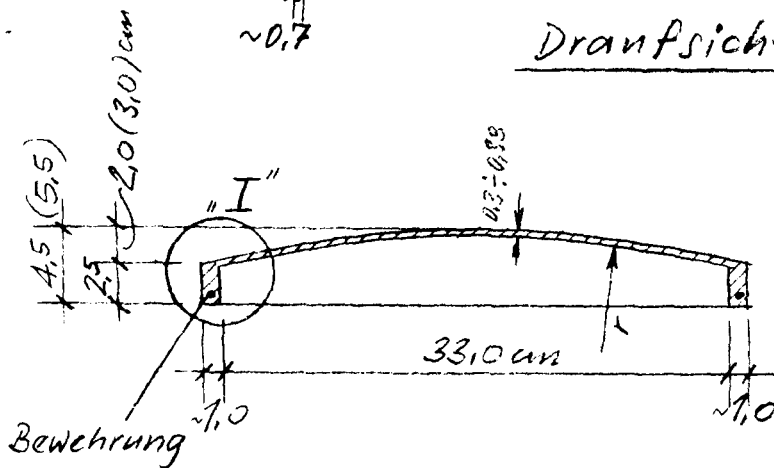
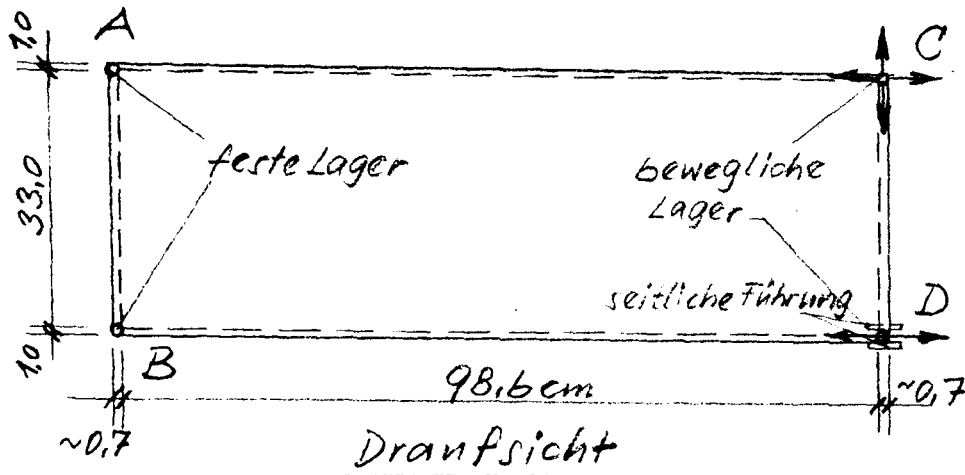
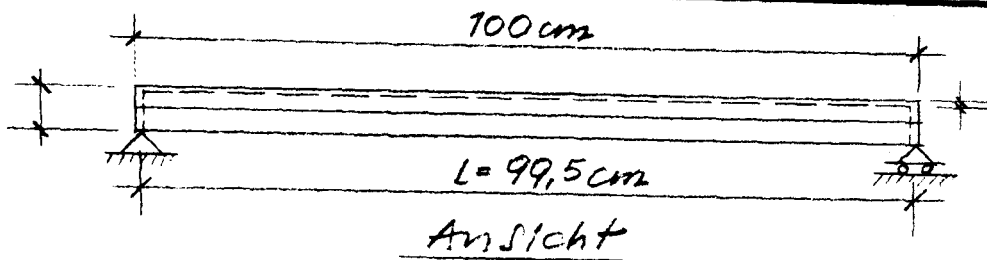
Bild 20



Negativmatrize für die Herstellung der
Asbestzement-Modellschalen

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

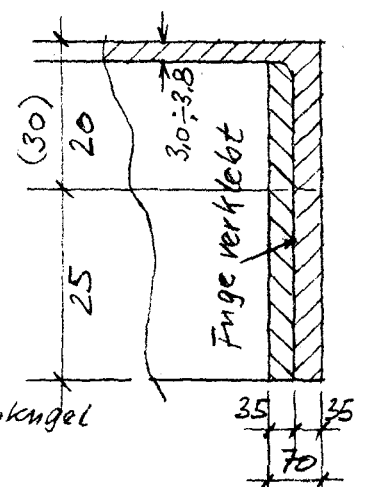
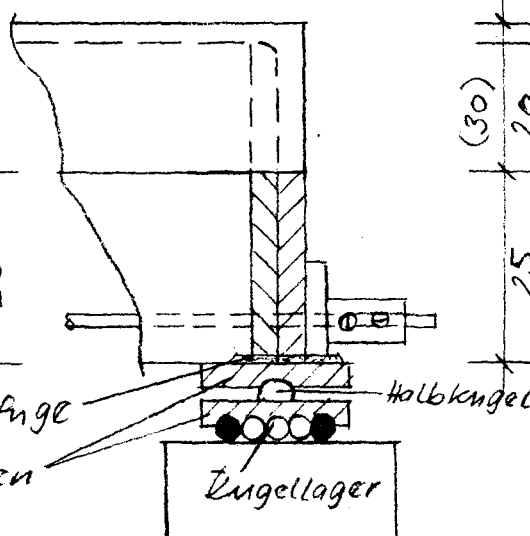
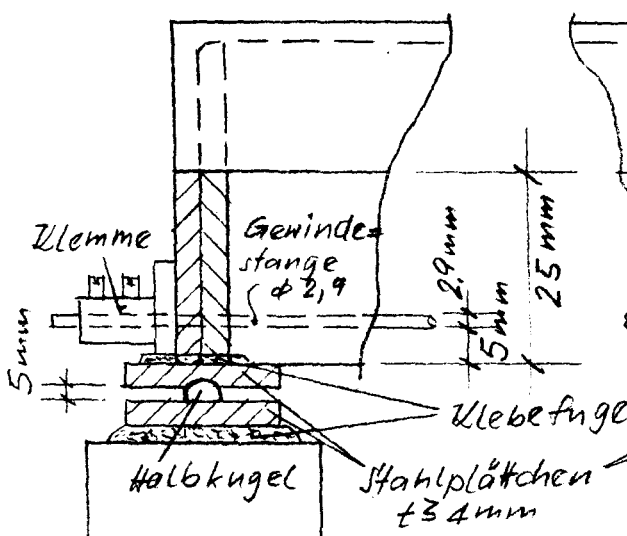
Bild 21



feste Lager
A und B

bewegliche Lager
C + D

Binderscheibe

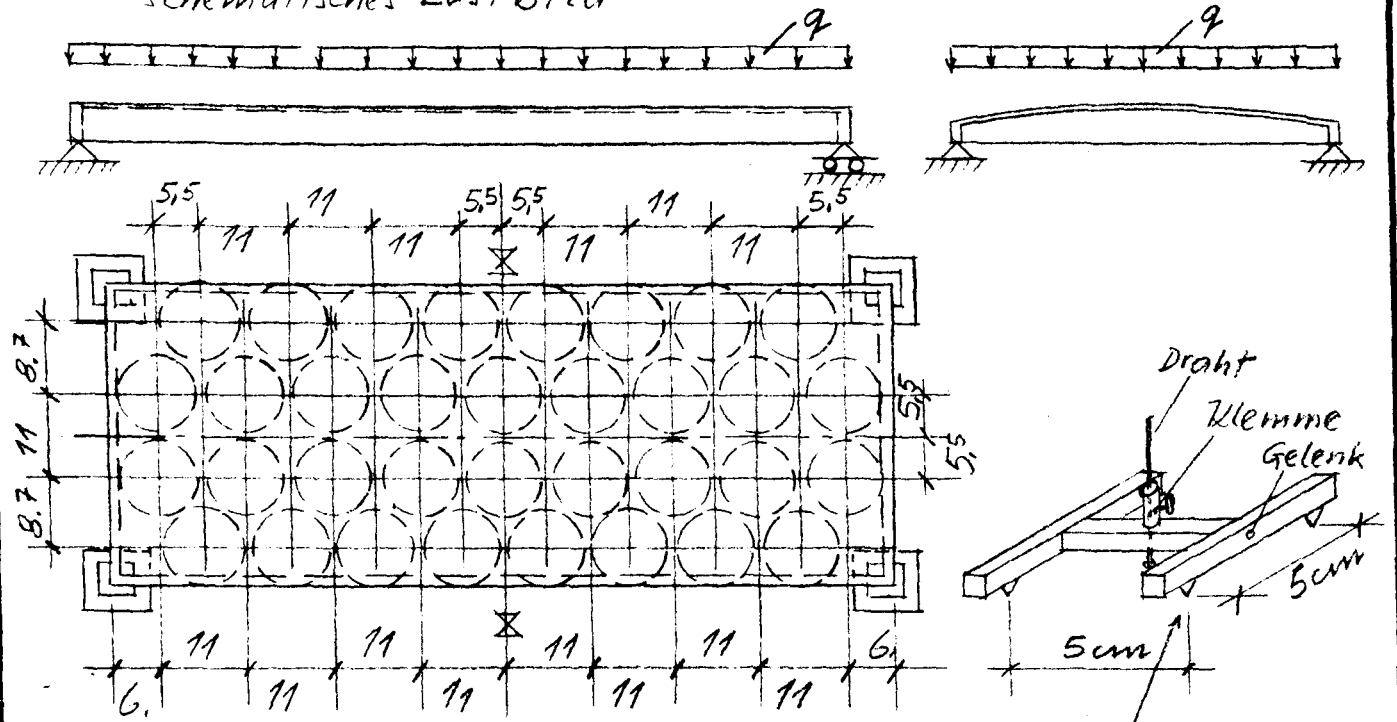


Abmessungen der Modellschalen
aus Asbestzement

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

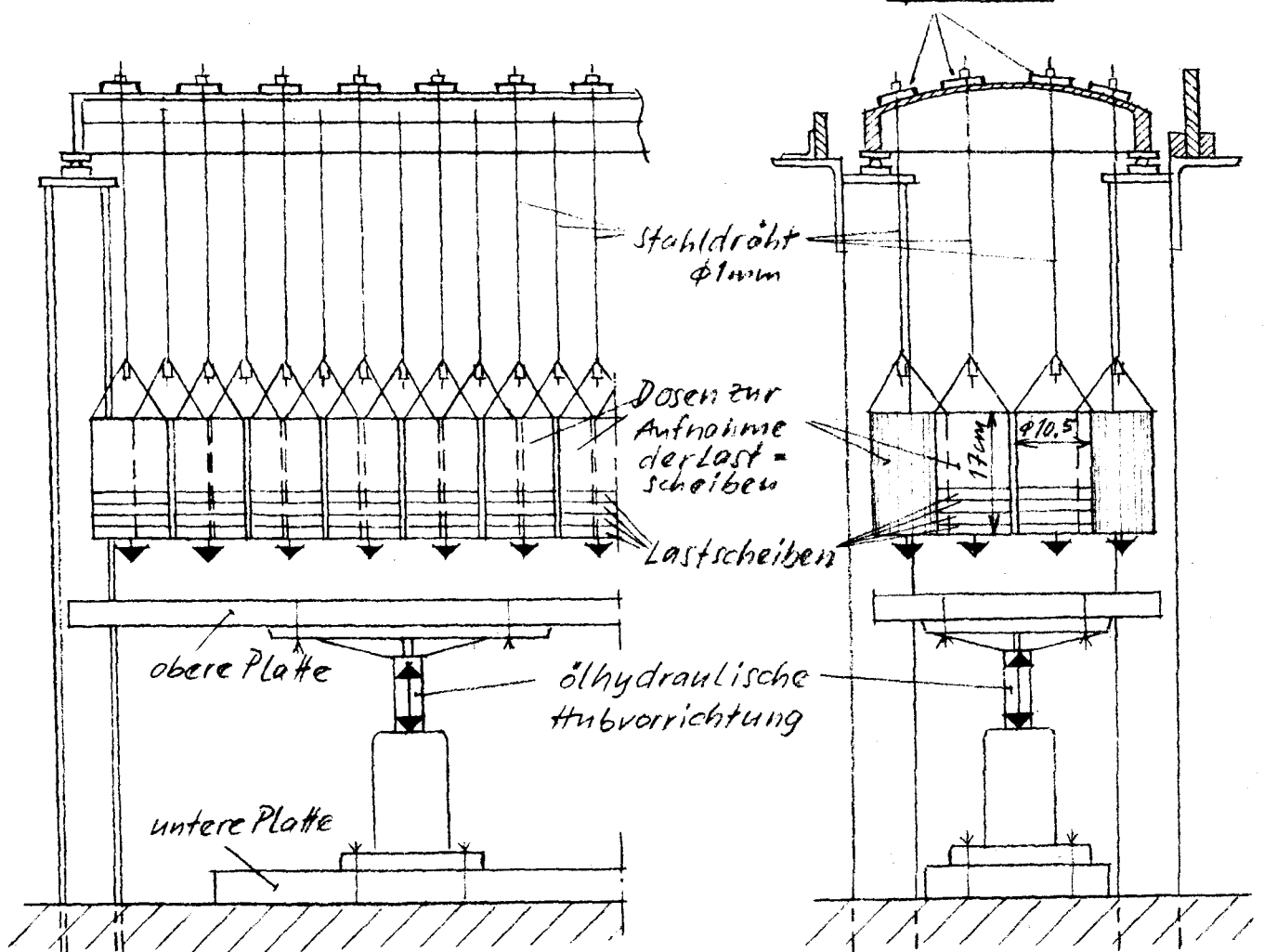
Bild 22

schematisches Lastbild



Lastanordnung im Grundriß

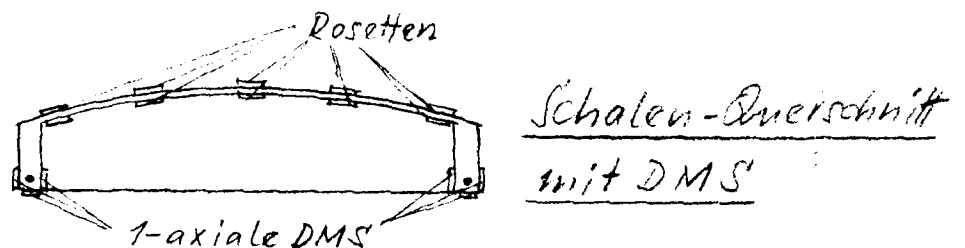
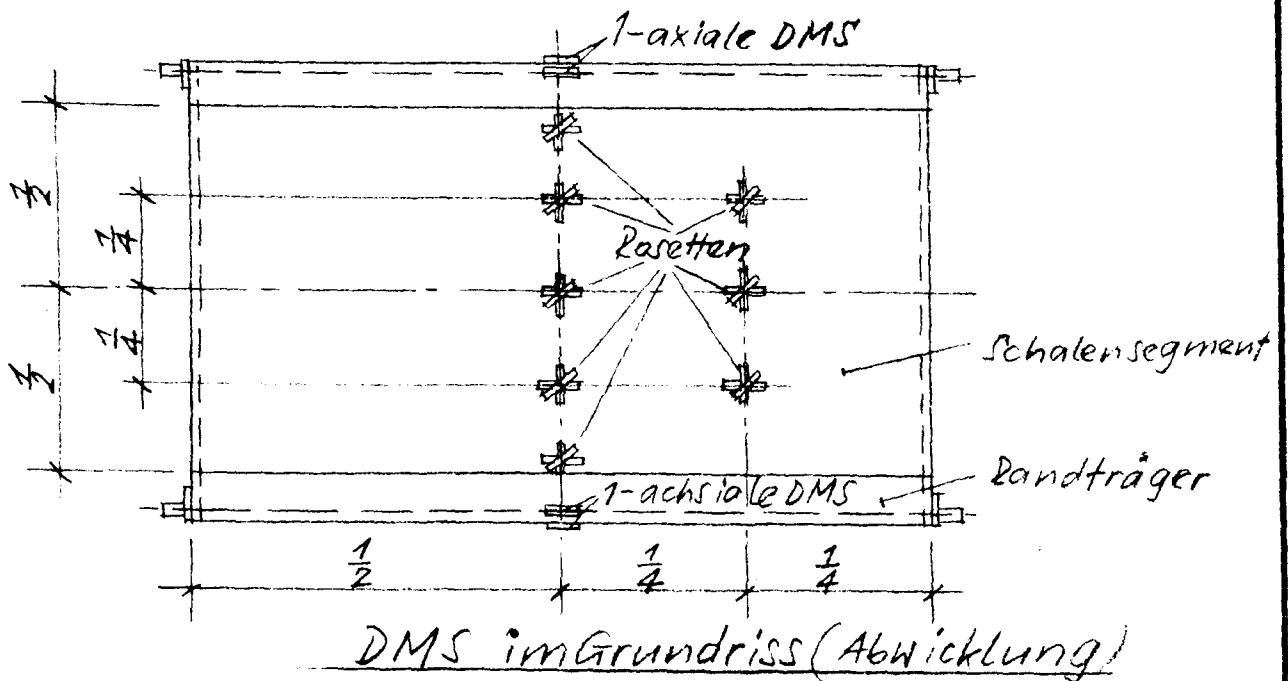
Lasteintragungspunkt



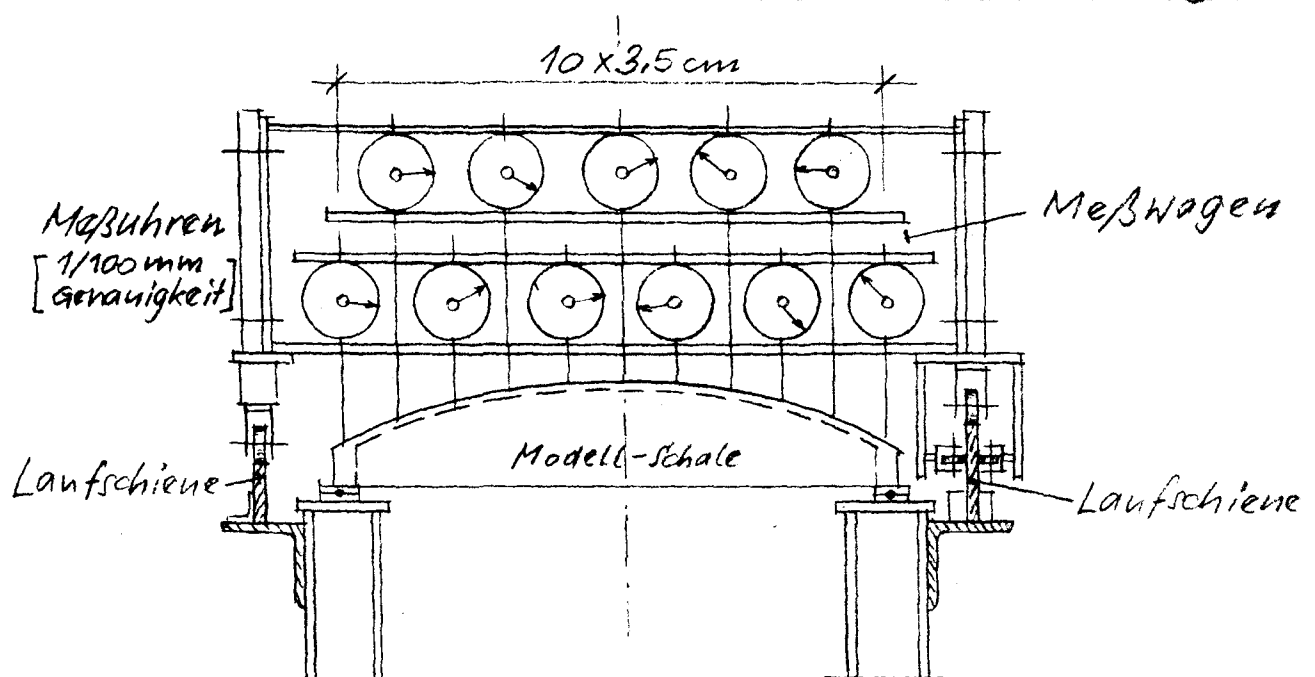
Versuchseinrichtung und Belastungsanordnung

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 23



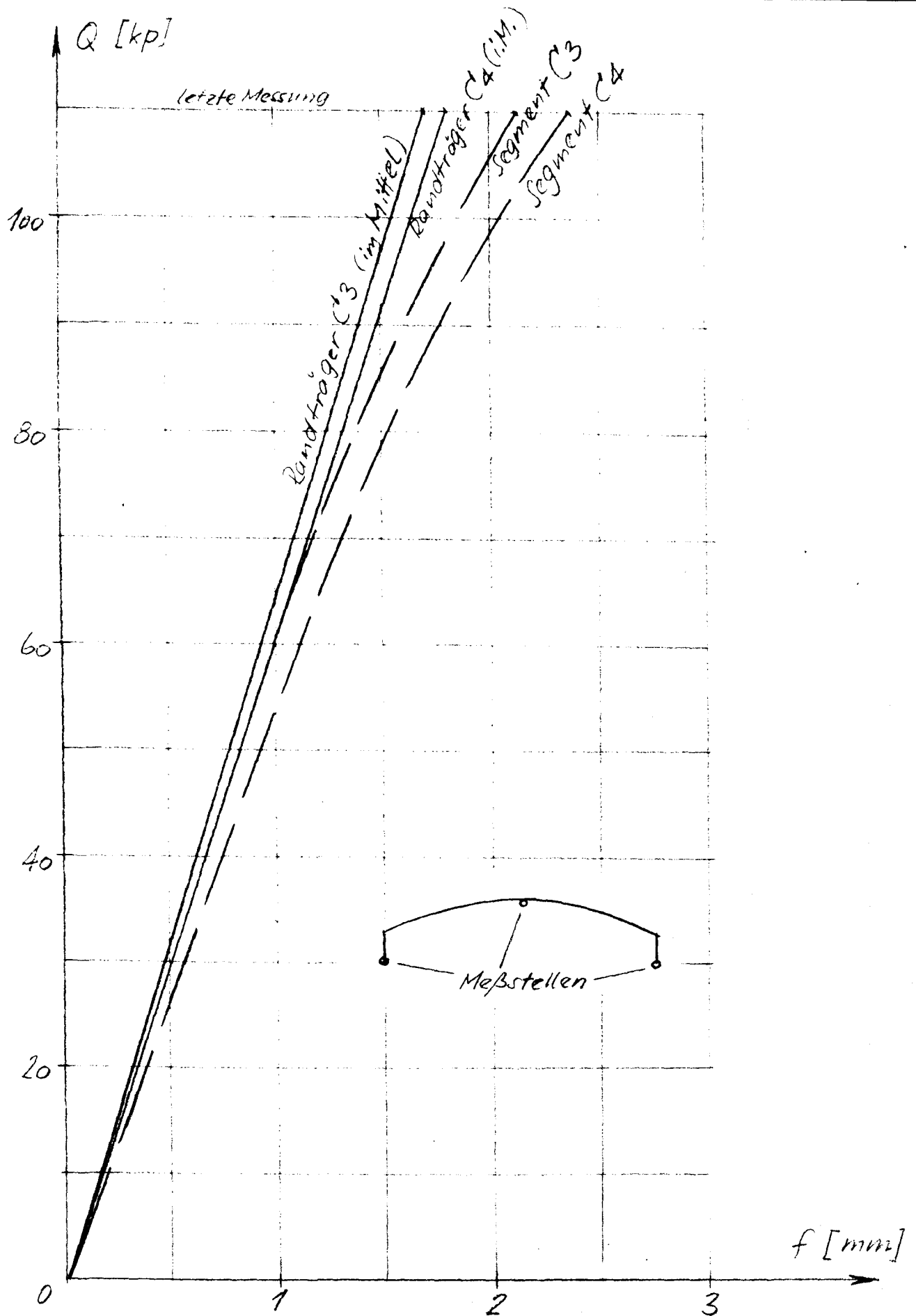
Meßeinrichtung für Vertikalverformungsmessung



Anordnung der Meßstreifen und Lage der Meßpunkte für die Verformungsmessungen

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

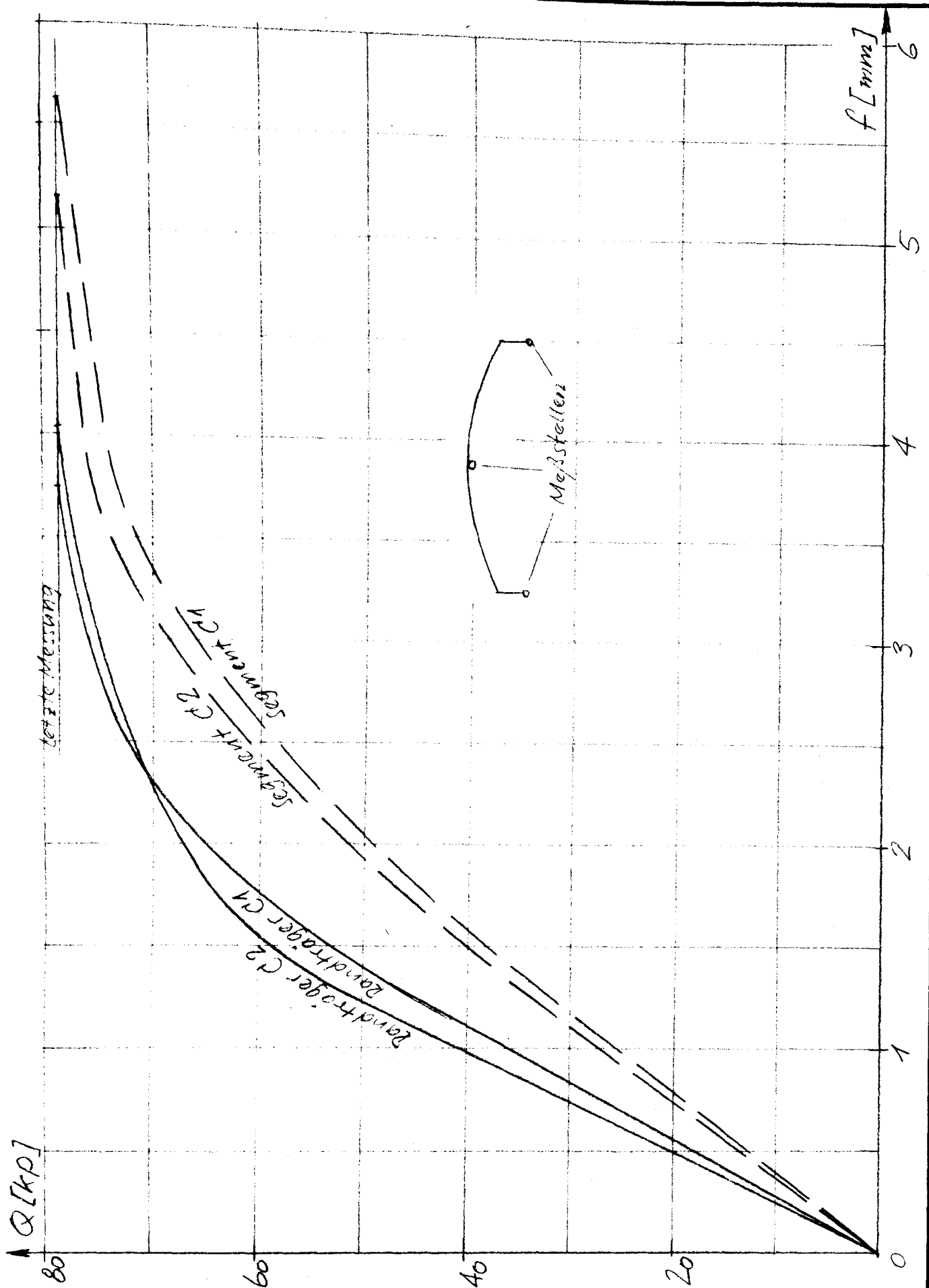
Bild 24



Last-Durchbiegungs-Diagramm für die
Schalen-Modelle Nr. C3 und C4 (mit 3cm Stichtiefe)

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

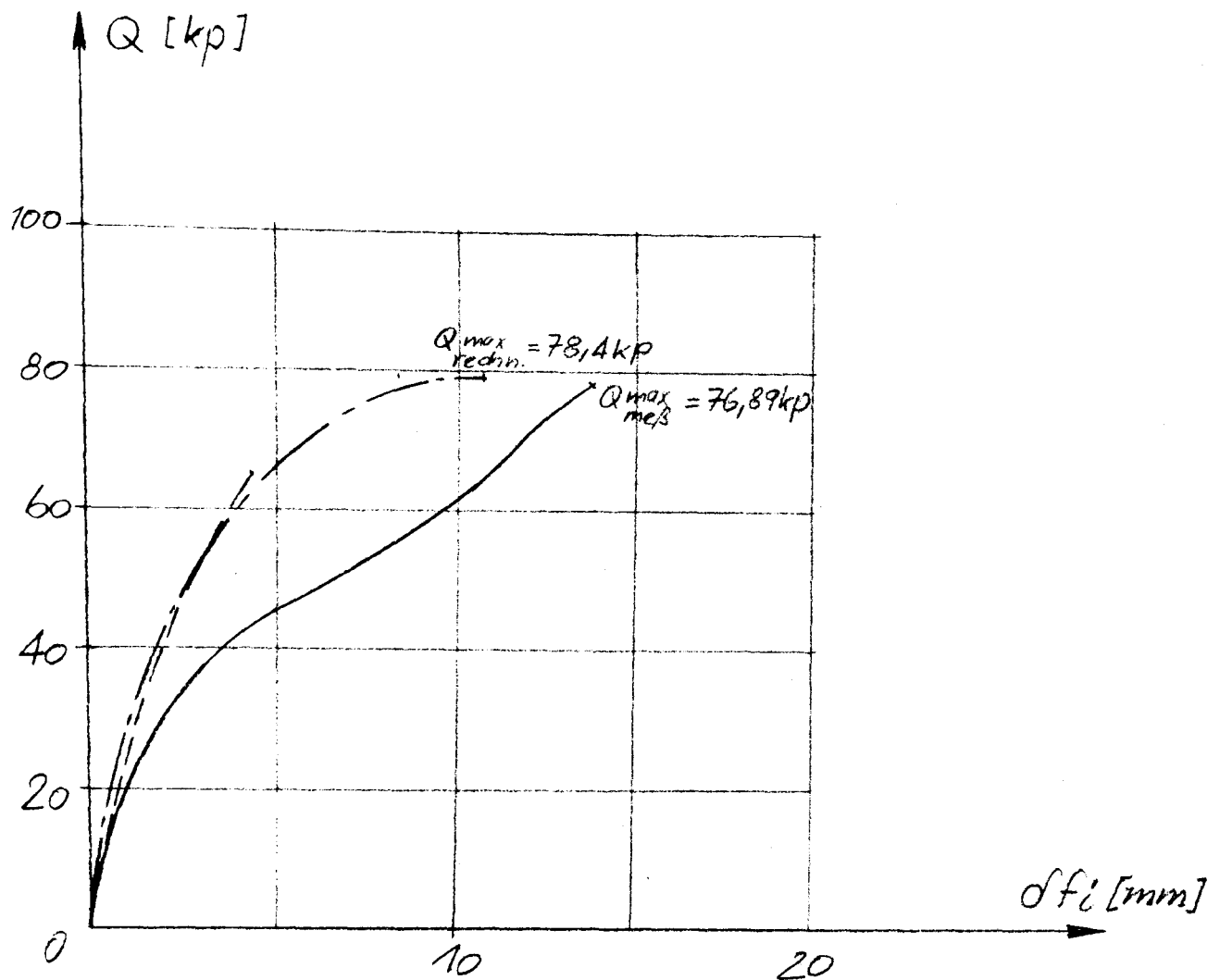
Bild 25



Last-Durchbiegungs-Diagramm für die
Schalen-Modelle Nr. C1 und C2 (mit 2 cm Stichtiefe)

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 26

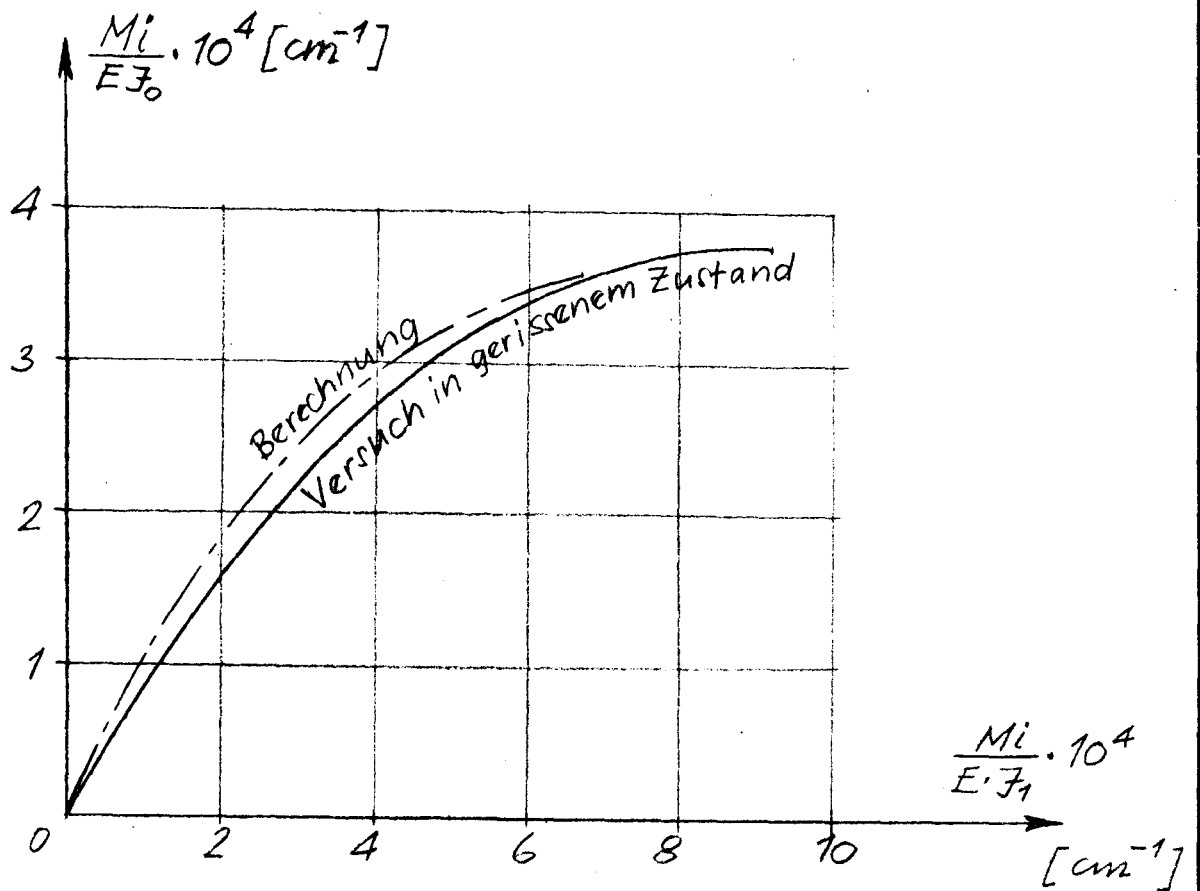


- — — — — Versuch bis zur Rissbildung
- Versuch in gerissenem Zustand
- · - · - · - Berechnung nach B III / 2.3

Deformations-Diagramm des Scheitelpunktes
(Modell E, 5)

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

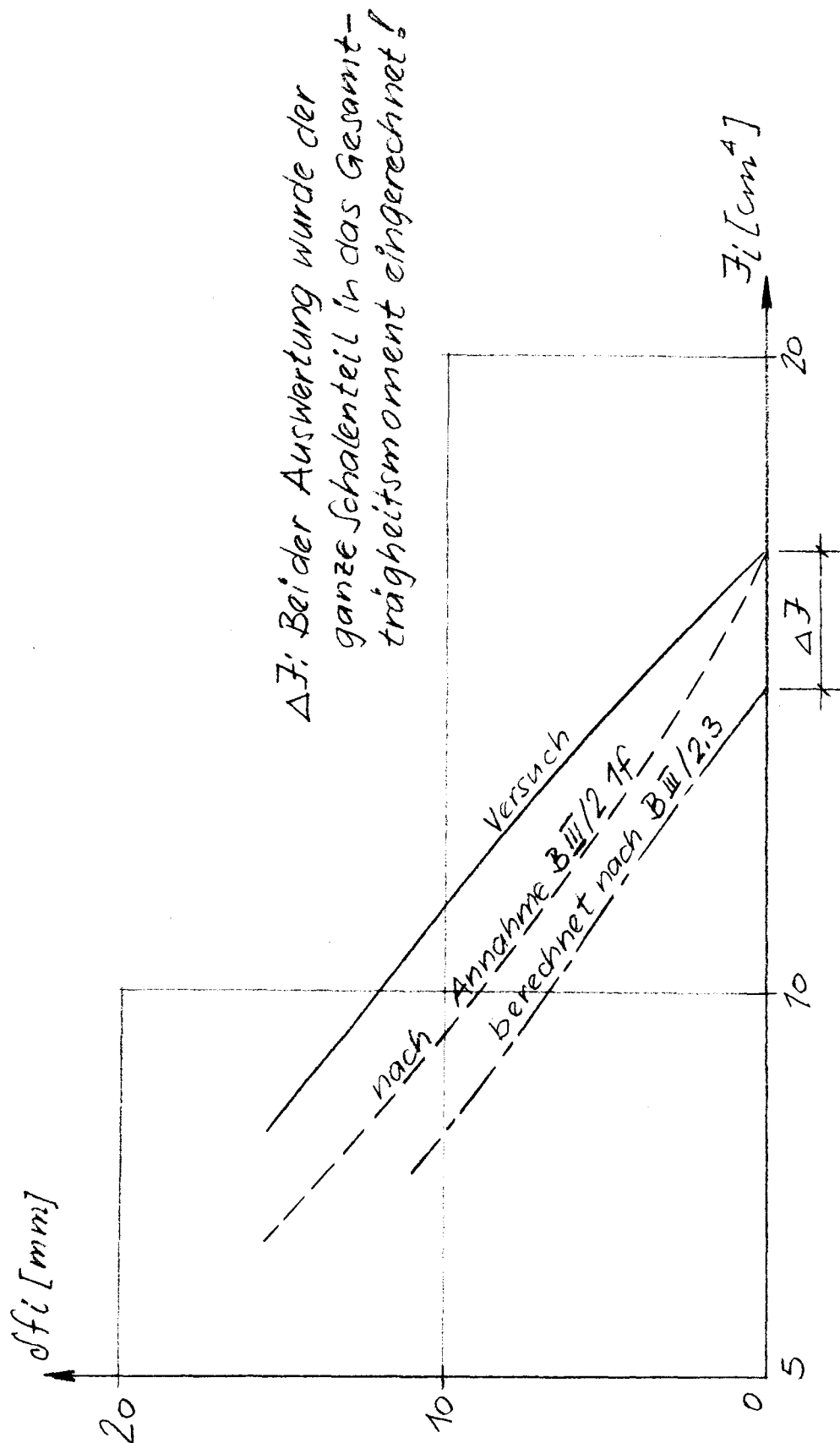
Bild 27



Krümmungsänderung (Modell E, 5)

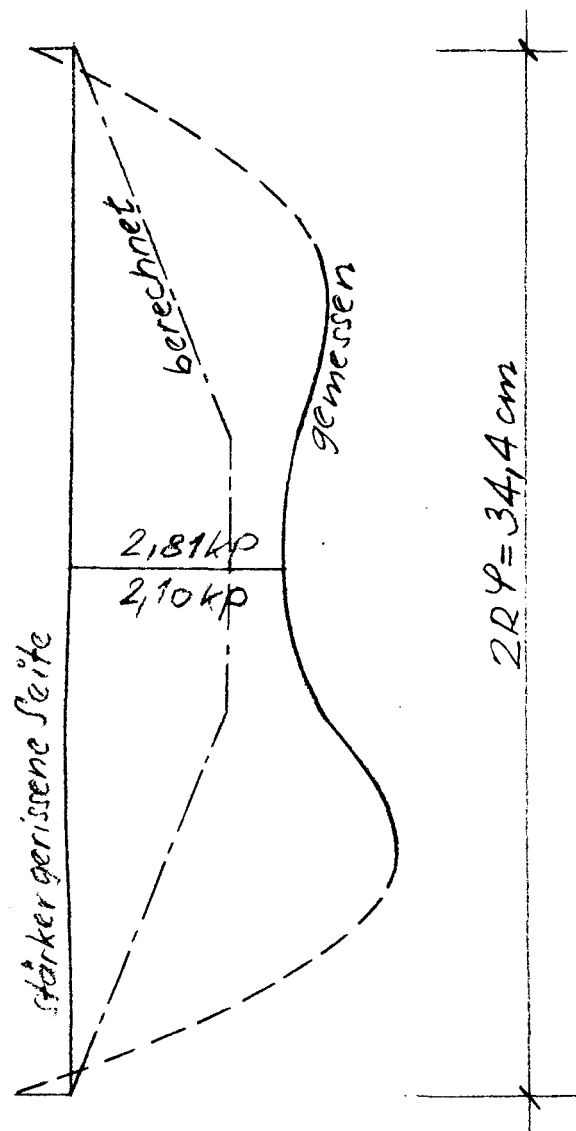
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 28



ΔF : Bei der Auswertung wurde der ganze Schalenteil in das Gesamttragheitsmoment eingerechnet!

7. Feb. 1974



Biegelinie in Querrichtung im Bruch-
Zustand (Modell E, 5)

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 30